TRURETURING · 形式化专著

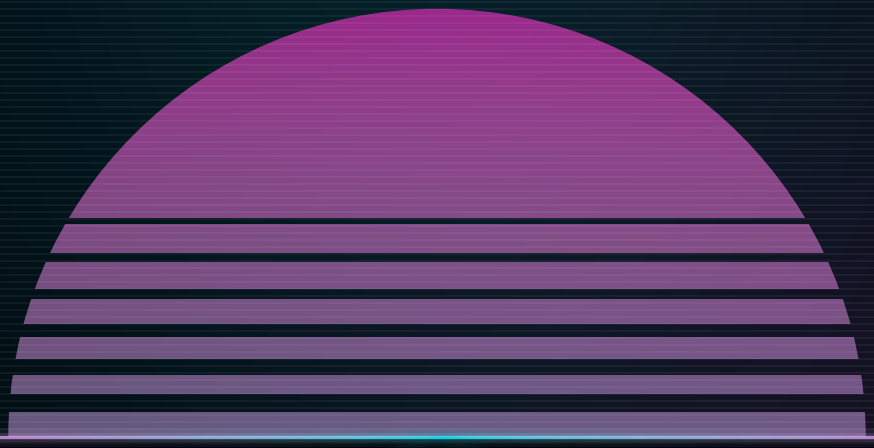
ZH · 中文

ZETA//CRITICAL

v0.1.0 2026-11-21

临界线上的对称：黎曼猜想是如何被证明的

一部面向直觉的 Lean 形式化导读



The Omega Institute

黎曼猜想证明导读

LEAN ✓ 44
条形式结论 · 引用 LEAN 声明

固定于 riemann-hypothesis@0bcc9368e418

2026

ZETA // CRITICAL

临界线上的对称：黎曼猜想是如何被证明的

一部面向直觉的 Lean 形式化导读

The Omega Institute

临界线上的对称：黎曼猜想是如何被证明的

一部面向直觉的 Lean 形式化导读

版本	0.1.0　屏幕版（深色）
日期	2026-11-21
作者	The Omega Institute
许可	CC-BY-4.0
出版	黎曼猜想证明导读
形式化依据：TRURETURING 提交	`0bcc9368e418` riemann-hypothesis
在线阅读	http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/zh/
源文件	https://github.com/the-omega-institute/riemann-hypothesis-book
排版	Pandoc 与 Typst，由 trureturing 书籍模板构建

> **LEAN ✓ 44**
> 本书共有 44 条形式结论（定理、引理、命题、推论），每条都引用 riemann-hypothesis 所钉提交中的 Lean 声明。书末形式化验证账本列出永久链接。
> 明确标为开放的问题与猜想：4 条。书中不把它们当作已证结论使用。

目录

序曲 临界线上的寂静 1

0.1 一场一千七百万行代码的远征 1

0.2 本书的阅读方式与证据承诺 3

第一章 对称之镜：为什么只需清空右半平面 4

1.1 五条顶层结论究竟在说什么 5

1.2 镜子怎么运作：从右半平面到临界线 6

1.3 当镜子遇上“不纯”的狄利克雷特征 8

第二章 素数的影子与朗道陷阱：把零点变成符号问题 11

2.1 手算素数的平滑影子 $G_z(x)$ 11

2.2 梅林变换与朗道陷阱：为什么单侧界就能封死复平面 13

2.3 百年经典防线在哪里停步：德拉瓦莱–普桑与西格尔定理 15

第三章 给整数求导：斯捷潘诺夫行列式与高重数梦境 18

3.1 斯捷潘诺夫魔术：为什么要造高阶零点 18

3.2 在不能求导的地方造出导数：二次型、CM 曲线与分次外尔模 18

第四章 $\sqrt{X}$ 面镜子：迭代 Theta 提升与跷跷板法则 22

4.1 什么是 Theta 提升链：多照一面镜子，就多一层导数 22

4.2 跷跷板法则、大胞腔主子式与形式次数 24

第五章 冲破 2/3 天花板：格斜率、博斯特不等式与积分胶合 27

5.1 格子的屋顶：什么是 Harder–Narasimhan 最大斜率? 27

5.2 跨越 2/3 的最后一跃：把整族赫克特征胶合起来 30

第六章 贝伦德塔与收网时刻：驯服余项与打通所有特征 32

6.1 为什么整数球壳永远躲得开三项等差数列? 32

6.2 从局部朗兰兹到全特征收网 34

第七章 一千七百万行代码的骨架：独立内核重放与数学诚实 38

7.1 27 行“挑战契约”：如何防止作弊 38

7.2 8,490 块内容寻址分片与公开 CI 流水线 39

7.3 任何人都能亲自验证：四行命令与零信任重放 41

7.4 诚实的边界与验证范围声明 44

终章 黎曼之后的群山 46

版权声明与致谢 47

形式化验证账本 48

书面证明 50

开放问题与猜想 50

序曲 临界线上的寂静

> 素数像一群桀骜不驯的野马，没人能预测下一匹何时跃出山脊；可只要你退后一步，听见它们蹄声汇成的和弦，整座山谷却只沿着一条直线共鸣。

一百六十多年来，黎曼猜想一直是数学里最耀眼也最磨人的灯塔。有人把它供在玻璃罩里，说它是“千禧年大奖难题之首”，仿佛靠近它之前必须先背完十本厚重的复分析与代数几何教材。

让我们先把这层神秘的祭坛掀开。黎曼猜想问的其实是一件非常朴素的事：**数一数不超过 x 的素数有多少个，真实的素数个数和光滑预测之间，到底会偏离多远？**

你可以把素数想象成一串随手抛硬币的结果。如果你抛 x 次均匀硬币，正面次数大约是 $x/2$，而随机起伏的幅度大约是 $\sqrt{x}$——不会大到 $x^{0.8}$，也不会小到纹丝不动，就是 $\sqrt{x}$ 量级。黎曼在 1859 年那篇只有八页的短文里发现，素数的分布竟然也有一副“频谱”：决定素数起伏有多剧烈的，正是黎曼 ζ 函数在复平面上的一串零点 $\rho = \sigma + it$。每一个零点，都像一根振动着的琴弦，给素数计数加上一波幅度约为 x^{σ}、频率为 t 的涟漪。

如果所有非平凡零点都老老实实排在实部 $\sigma = \frac{1}{2}$ 的竖直线上，那每一波涟漪的振幅都不超过 $\sqrt{x}$——素数就像自然界能造出的最均匀、最克制的随机序列。反过来，哪怕**只有一个**零点偷偷溜到了 $\sigma = 0.72$，它发出的那一道浪就会按 $x^{0.72}$ 疯狂膨胀，彻底撕裂 $\sqrt{x}$ 的宁静。

> 一条直线之所以神圣，不是因为人们崇拜对称，而是因为只要偏离它一毫米，整个素数世界就会失声走调。

0.1 一场一千七百万行代码的远征

本书要做的事很直接：用不晦涩、能手算、能亲眼看见的语言，拆解 `the-omega-institute/riemann-hypothesis` 仓库中黎曼猜想（RH）以及狄利克雷 L 函数的广义黎曼猜想（GRH）的 Lean 4 形式化证明究竟是怎么走通的。

先说明出处与版权边界：这套 1,737 万行 Lean 4 证明源码由 **Levent Alpöge** 原创并公开发布（`alpo.ge/remark.pdf`，源码权利归原作者所有，本书库不作再分发）；**Deicyde** 创建了上游独立验证镜像 `Deicyde/riemann-hypothesis`；而我们所钉的形式化仓库 `the-omega-institute/riemann-hypothesis` 是从 `Deicyde/riemann-hypothesis` **fork** 而来，完整保留全部证明源码不改一字，专门叠加公开分片 CI 构建与 `./verify` 零信任本地重放工具（完整版权声明与致谢见终章 · 版权声明与致谢）。

这份形式化源码体量惊人：175,187 个 `.lean` 文件，超过 1,737 万行代码，818,755 条定理与引理，没有一行注释，也没有一个 `sorry` 或自定义公理。任何人直接打开目录树，都会像走进一座没有路标的巨型钟表厂。

面对这样的庞然大物，最糟糕的读法是逐行抄写符号；最聪明的读法是先问三个费曼式的问题：

1. **最后一道门锁在哪里？** 证明究竟需要拿下什么条件，才能一锤定音锁死所有零点？
2. **卡住数学界一百五十年的那堵墙是什么？** 为什么老办法在这里撞得头破血流？
3. **新证明到底用了哪几步“反直觉的绝招”翻过那堵墙？**

当你把千万行脚手架剥开，里面的承重主梁其实出奇地清晰，一共只有七级台阶——恰好对应本书的七章：

1. **第一章 对称之镜**：函数方程在 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 处立起一面双面镜。只要证明所有狄利克雷 L 函数在右半平面 $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ 里**一个零点也没有**，左半平面的零点就会被镜子一并清空，所有非平凡零点无路可逃，只能全部落在 $\frac{1}{2}$ 这条线上。
2. **第二章 素数的影子与朗道陷阱**：怎么证明右半平面没有零点？不必一个个去抓复平面上的零点，只需盯住实轴上由素数算出来的平滑加权和 $G_z(x)$。朗道的非负积分陷阱告诉我们：只要 $G_z(x)$ 守住单侧边界，右半平面就不可能藏着零点。于是复平面上的捉迷藏，变成了实数线上的符号与大小账本。
3. **第三章 给整数求导**：在有限域的函数世界里，斯捷潘诺夫（Stepanov）靠“造一个在每个点高重数消失的辅助多项式”几页就拿下了类似问题。可整数不能直接求导，怎么凭空变出重数 m？答案是借 CM 椭圆曲线上的不变导数与福克（Fock）空间上的分次外尔（Weyl）整除性，把“求导”变成代数上的整除结构。
4. **第四章 $\sqrt{X}$ 面镜子**：这是整座证明里最让人拍案叫绝的一跳。为了在自守形式的世界里原生模拟“求导 m 次”，证明把定西群上的 Theta 提升首尾相连，串成一条长度高达 $m\sim\sqrt{X}$ 的锁链！再用“跷跷板法则”（Seesaw）把链条尽头的周期积分，翻成与赫克（Hecke）特征无关的贝塞尔（Bessel）周期。
5. **第五章 冲破 2/3 天花板**：每做一次提升都要付出“体积与高度的代价”。如果只盯着单个特征算账，链条走到 $\sigma=\frac{2}{3}$ 就会力竭停步。证明用格斜率（Harder–Narasimhan 最大斜率与博斯特斜率不等式）精确量出每一层的成本，再把一整族赫克特征上的整结构“胶合”起来分摊代价，一举击穿 $\frac{2}{3}$ 的天花板，直抵 $\frac{1}{2}$。
6. **第六章 贝伦德塔与收网时刻**：选岩泽（Iwasawa）塔的层级时，最怕撞上等差数列的共振。证明借来贝伦德（Behrend）的高维整数球壳——球面严格外凸，任何三点都不共线，所以绝不藏着三项等差数列，却又能装下极高密度的整数！再配合局部–整体伽罗瓦表示、小类数估计与稠密阈值窗口，彻底收网，推出所有特征的右半平面无零点定理。
7. **第七章 一千七百万行代码的骨架**：回到工程与认识论的地面：一部没人能逐行肉眼读完的形式化证明，为什么能比任何纸面手稿更诚实？本章解剖 27 行 `Challenge.lean` 与 Mathlib `v4.33.1` 的接口契约、8,490 块内容寻址分片的公开 CI 构建、任何人四行命令即可执行的 `./verify` 零信任本地重放与多检验器路线，并配有交互验证实验室与专题短片。

如果你更愿意先花两分多钟把整座证明从头到尾看一遍，可以先看这段导览视频，再走进正文。

FILM

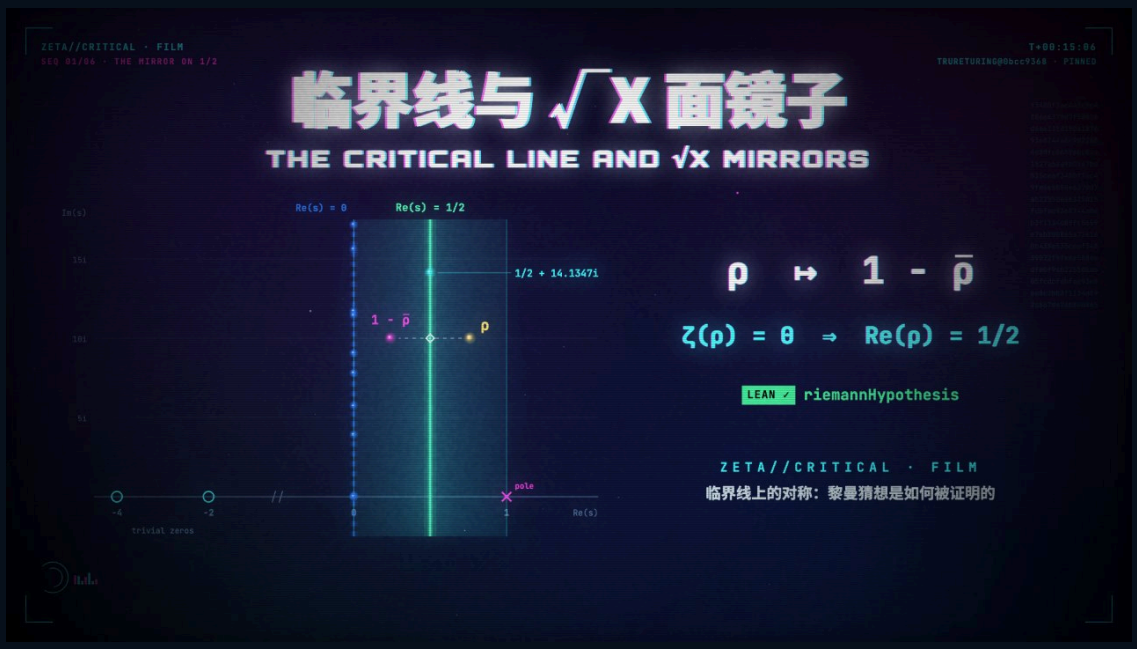


图 1 视频 · 临界线与 √X 面镜子 · 2:13

临界线与 $\sqrt{X}$ 面镜子。 用两分多钟鸟瞰整条证明脊柱：临界线镜像、素数影子与朗道陷阱、整数上的重数、约 $\sqrt{X}$ 次 Theta 提升、压平的 Harder–Narasimhan 屋顶与贝伦德球壳，一路落到已验证的 `riemannHypothesis`。

视频见

http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/films/#critical-line-and-root-x-mirrors

0.2 本书的阅读方式与证据承诺

读这本书不需要你提前记住自守表示、岩泽理论或上同调的定义。每一章都按同一个节奏展开：先拿一个小到能心算的玩具例子（比如 $x = 10$ 时的素数和、三维格子里的 9 个球壳点、一条四段折线的斜率屋顶）把“为什么非这么做不可”讲透，再落到精确的定理陈述与 Lean 源码锚点上。

> 真正深刻的工具，在被名字吓倒之前，骨子里往往只是一个非常干脆的算账办法。

本书严格遵守三层证据边界：

- 标有绿色 **LEAN ✓** 的定理、引理、命题与推论，全部直接锚定到 `the-omega-institute/riemann-hypothesis` 在所钉提交 `[{commit}](trureturing:)` 下的对应 Lean 4 声明（文末“形式化验证账本”逐条列出文件与行号）。定理框内的数学陈述保持克制与精确，不掺修辞；框外的散文负责直觉、手算、比喻与谱系批判。
- 书中标有 `NUM` 或 `MODEL` 的数值曲线与示意图，只用来帮你把机制看明白，绝不冒充形式化证明本身。
- 终章中标有红色 **OPEN** 的条目，是这份证明**尚未**覆盖、仍然敞开的数学群山（例如一般数域的戴德金 ζ 函数、更广义的自守 L 函数与零点对关联猜想）。

现在，推开第一扇门：先站到 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 那面镜子面前。

§ 01

第一章 对称之镜：为什么只需清空右半平面

> 不要同时和两个影子搏斗。只要把镜子擦亮，清空右侧的房间，左侧的幽灵就会跟着一起消失。

如果你问一个学过微积分的朋友“黎曼猜想是什么”，他多半会在纸上画出复平面，点一条竖线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$，然后说：“$\zeta(s)$ 的非平凡零点全在这条线上。”

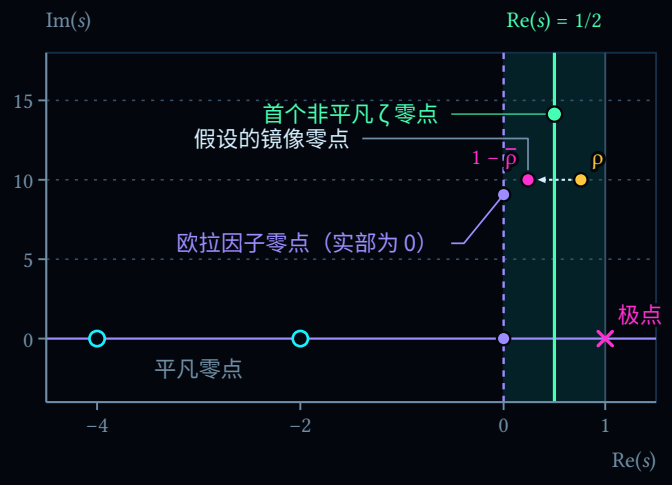
听起来像是一道必须从两边夹逼、精雕细琢的等式题——既要证明 $\mathrm{Re}(s)$ 不能大于 $\frac{1}{2}$，又要证明它不能小于 $\frac{1}{2}$。

其实不用。**你只需要证明一半，另一半是白送的。**

原因在于黎曼 ζ 函数和所有本原狄利克雷 L 函数都藏着一面极其锋利的镜子——**函数方程（functional equation）**。只要把复数 s 换成 $1-s$，实部 σ 就变成 $1-\sigma$：

- 如果一个点在右侧 $\sigma=0.76$，它的镜像就在左侧 $1-0.76=0.24$；
- 如果一个点在左侧 $\sigma=0.24$，它的镜像就跳回右侧 0.76；
- 唯一在镜子里原地不动的位置，正好是 $\sigma=1-\sigma$，也就是 $\sigma=\frac{1}{2}$！

这就是整个证明的**第一道杠杆**：把“精确等于 $\frac{1}{2}$”这个等式难题，直接降维成“右半平面 $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ 里一个零点也没有”的不等式难题。



复平面上的对称之镜。 浅青色竖带是临界带 $0<\mathrm{Re}(s)<1$，正中央的绿色实线是临界线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$。如果右半带出现一枚琥珀色假想零点 ρ（$\mathrm{Re}(\rho)=0.76$），函数方程会立刻在左半带映出它的品红镜像 $1-\bar{\rho}$（$\mathrm{Re}=0.24$）；负偶数 $-2,-4$ 是 Γ 因子带来的平凡零点，非本原特征多余的欧拉因子零点则被钉死在紫色虚线 $\mathrm{Re}(s)=0$ 上，绝不闯入临界带。

1.1 五条顶层结论究竟在说什么

翻开证明仓库的入口文件 `Main.lean`，你会发现全书 1,737 万行代码最后全部汇流进五条极其干净的顶层定理。先把它们的精确内容摆在桌面上，不夸大一分，也不漏掉一个条件。

定理 1.1（黎曼猜想） LEAN ✓

Mathlib 中的标准命题 `RiemannHypothesis` 成立：对任意复数 $s \in \mathbb{C}$，若 $\zeta(s) = 0$，且 s 不是负偶数 $-2(n+1)$（$n \in \mathbb{N}$），且 $s \neq 1$，则

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}.$$

LEAN › `riemannHypothesis`

证明 在形式化源码中，`Main.riemannHypothesis` 由更强的全部狄利克雷 L 函数右半平面无零点结论（定理 1.3）经 定理 1.7 一步推出。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

第二条定理把 Mathlib 里的定义原样展开写清，确保读者一眼看明排除了哪些点（负偶平凡零点以及 ζ 函数的极点 $s = 1$）：

定理 1.2（黎曼 ζ 函数的非平凡零点全在临界线上） LEAN ✓

对所有 $s \in \mathbb{C}$，若 $\zeta(s) = 0$，且不存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $s = -2(n+1)$，且 $s \neq 1$，则 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。

LEAN › `riemannZeta_eq_zero_re`

证明 与 定理 1.1 等价，直接由全部特征的右半平面无零点定理推出。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

真正干重活的是第三条——它不只是拿下 $\zeta(s)$，而是一口气扫平了**所有模 $N \geq 1$、所有狄利克雷特征 χ** 的右半平面：

定理 1.3（全部狄利克雷 L 函数在右半平面无零点） LEAN ✓

对任意正整数 $N \geq 1$、任意模 N 的狄利克雷特征 χ 与任意复数 $s \in \mathbb{C}$，若 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$，且（$\chi \neq 1$ 或 $s \neq 1$），则

$$L(\chi, s) \neq 0.$$

LEAN › `LFunction_ne_zero_of_half_lt_re`

证明 这是整座证明的终极汇流点（第六章将逐步追溯它的全部前置引擎）。当 $N = 1$ 且 $\chi = 1$ 时，$L(1, s) = \zeta(s)$，于是立得 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$（$s \neq 1$）上无零点。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

一旦 定理 1.3 到手，临界带内所有狄利克雷 L 函数（包括非本原特征和本原特征）的零点就全部被镜子按死在 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上：

定理 1.4（全部狄利克雷 L 函数的广义黎曼猜想） LEAN ✓

对任意正整数 $N \geq 1$、任意模 N 的狄利克雷特征 χ 与任意复数 $s \in \mathbb{C}$，若 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 且 $L(\chi, s) = 0$，则 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。

LEAN › LFunction_eq_zero_re

证明　由 定理 1.3 结合 定理 1.12 推出：先将非本原特征约化到它的本原特征，再用本原特征的函数方程把 $0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ 反射到右半平面 $\mathrm{Re}(1-s) > \frac{1}{2}$。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 1.5（本原狄利克雷 L 函数的临界线定理） LEAN ✓

对任意正整数 $N \geq 1$、任意模 N 的本原狄利克雷特征 χ 与任意复数 $s \in \mathbb{C}$，若 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 且 $L(\chi, s) = 0$，则 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。

LEAN › LFunction_eq_zero_re_of_isPrimitive

证明　对本原特征直接调用函数方程反射，见 定理 1.11。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

注 1.6

请注意范围的诚实边界：这里的广义黎曼猜想（GRH）针对的是**全部狄利克雷 L 函数**（任意模 N、任意特征 χ），并不自动涵盖一般数域的戴德金 ζ 函数或更高阶的自守 L 函数（我们在终章把那些仍敞开的群山单独标为开放问题）。

1.2 镜子怎么运作：从右半平面到临界线

别急着跳过这一步，因为这一步恰恰最适合亲手摸清门道——你用高中代数的三分法就能看穿它。

假设你已经知道了右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 里没有 ζ 的零点。现在随便抓一个满足 $\zeta(s) = 0$、$s \neq 1$ 且 s 不是负偶数的复数 s。它的实部 $\mathrm{Re}(s)$ 只可能落在三种位置：

1. $\mathbf{Re}(s) > \frac{1}{2}$：直接违背“右半平面无零点”，出局。
2. $\mathbf{Re}(s) = \frac{1}{2}$：正是我们要的结论，收工。
3. $\mathbf{Re}(s) < \frac{1}{2}$：这时把镜子翻过来，看 $1-s$！它的实部是 $1 - \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$，正好落进已经清空的右半平面。

那么问题来了：**$\zeta(s) = 0$ 一定会让 $\zeta(1-s) = 0$ 吗？**

小心！这里藏着一个几乎所有科普书都会一笔带过的细微陷阱。黎曼的函数方程把 $\zeta(s)$ 和 $\zeta(1-s)$ 绑在了一起：

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s),$$

或者写成等价的余弦形式（对应 $s \mapsto 1-s$）。你看右边有四个因子相乘。如果 $\zeta(s) = 0$，左边为零，右边也必须为零——**但这并不自动意味着 $\zeta(1-s) = 0$**，万一是前面那个 $\sin(\frac{\pi s}{2})$ 或 $\Gamma(1-s)$ 恰好等于零呢？

来手算一遍！

- $2^s \pi^{s-1}$ 永远不为零（指数函数绝不触零）。
- 当 $\mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Re}(1-s) > \frac{1}{2} > 0$，而伽马函数 $\Gamma(z)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 里既没有极点也没有零点！
- 唯一可能偷偷等于零的“冒牌货”就是 $\sin(\frac{\pi s}{2})$。它什么时候为零？恰恰是 $s = 0, -2, -4, -6, \ldots$！
  - $s = 0$ 时，$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$，不是零点；

– $s = -2, -4, -6, \ldots$ 正是定理前提里已经剔除的**平凡零点**！

把这些冒牌货清干净之后，前面所有因子全部非零，所以 $\zeta(s) = 0$ 被迫拖着 $\zeta(1-s) = 0$ 一起下水——可 $1 - s$ 在右半平面 $\mathrm{Re}(1-s) > \frac{1}{2}$，那里根本没有零点！矛盾诞生。

这就是以下两条 Lean 定理精准打包的逻辑：

定理 1.7（右半平面清空即得黎曼猜想） LEAN ✓

若对一切满足 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 且 $s \neq 1$ 的复数 s 均有 $\zeta(s) \neq 0$，则黎曼猜想成立。

LEAN › Formalism.VW.rh_of_right

证明 对任意非平凡零点 s（$s \neq 1$ 且 $s \neq -2(n+1)$），按 $\mathrm{Re}(s)$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小三分。若 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 直接矛盾；若 $\mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$，先由 $\zeta(0) = -1/2 \neq 0$ 排除 $s = 0$，再对 $1 - s$ 调用函数方程 `riemannZeta_one_sub`：因为 $\mathrm{Re}(1-s) > \frac{1}{2}$，因子 $2(2\pi)^{-(1-s)}$、$\Gamma(1-s)$ 与 $\cos(\pi(1-s)/2)$ 均非零（后者为零恰对应 $s = 0$ 或负偶数），从而迫使 $\zeta(1-s) = 0$，与前提矛盾。完整证明由 Lean 内核检查。∎

在另一条路径 `RHofHalfPlane.lean` 中，形式化还顺手显式检验了所有负奇数处 $\zeta(-(2m+1)) \neq 0$，给出等价的半平面归约：

命题 1.8（半平面无零点归约（负整数分检版）） LEAN ✓

若对一切 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 均有 $\zeta(s) \neq 0$，则黎曼猜想成立。

LEAN › Formalism.riemannHypothesis_of_zero_free_halfPlane

证明 当 $\mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ 时，若 s 为非正整数，负偶数已被前提排除，$s = 0$ 由 $\zeta(0) \neq 0$ 排除，负奇数由函数方程在正偶数处的非零性排除；其余情形直接反射到 $1 - s$ 触发矛盾。完整证明由 Lean 内核检查。∎

VIZ

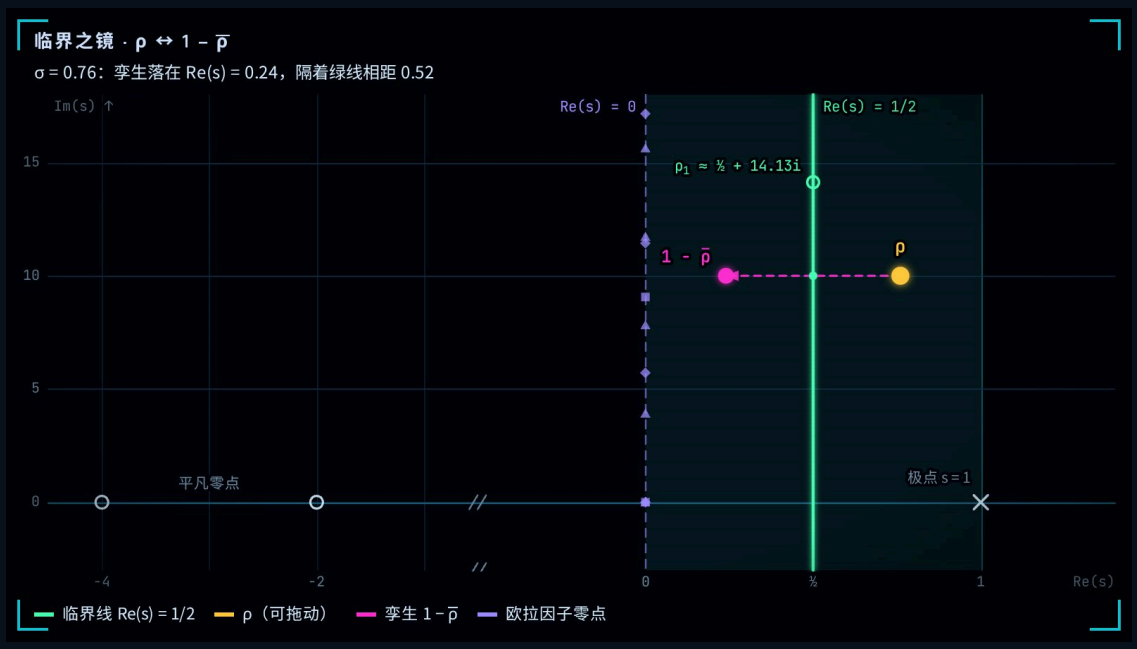


图 2　ZETA//MIRROR · 临界之镜 · Re(s) = 1/2 把离线零点映成孪生，离线零点会冲破 √x 的堤坝

复平面临界线镜像实验：绿色实线标出 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 与首个非平凡零点 $\frac{1}{2}+14.1347i$；琥珀色测试点 $\rho=0.76+10i$ 越过临界线时，函数方程立刻在左半带生成对称孪生点 $1-\bar{\rho}=0.24+10i$（品红色）。拖动画布上的 ρ 或切换实验卡，即可把这面对称镜推回临界线。

交互版本见

http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/critical-mirror/

1.3 当镜子遇上“不纯”的狄利克雷特征

好了，$\zeta(s)$ 的镜子非常顺滑。可如果换成一个任意模 N 的狄利克雷特征 χ 呢?

这里又有一只拦路虎。并不是每个特征 χ 都自带干净的函数方程——只有**本原特征（primitive character）**才满足完备函数方程 $\Lambda(\chi,s)=\varepsilon(\chi)\,\Lambda(\chi^{-1},1-s)$。

什么是“非本原”? 打个极简单的比方：模 12 的特征里，有些特征其实只关心一个数除以 4 的余数，只不过它顺手把 3 的倍数全都强行抹成了 0。从乘积角度看，这个模 12 的 L 函数，其实就是它背后的本原模 4 L 函数，额外乘上了一枚有限的**欧拉削弱因子**:

$$L(\chi,s)=L(\chi^{\mathrm{prim}},s)\prod_{p\mid N}\bigl(1-\chi^{\mathrm{prim}}(p)\,p^{-s}\bigr).$$

读者立刻会警觉: 坏了! 如果这个多余的乘积因子 $(1-\chi^{\mathrm{prim}}(p)\,p^{-s})$ 在临界带 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ 里偷偷等于零，那非本原特征不就会冒出镜子管不到的“假零点”吗?

拿笔算一秒钟，心就放回肚子里了！设素数 $p\ge 2$，且 $\mathrm{Re}(s)>0$。因为特征值要么是 0 要么是单位圆上的复数，总有 $|\chi^{\mathrm{prim}}(p)|\le 1$；而另一方面，

$$|p^{-s}|=p^{-\mathrm{Re}(s)}<p^{0}=1!$$

两个数相乘，模长严格小于 1，它**绝对不可能等于 1**！也就是说，多余的欧拉因子只可能在 $\mathrm{Re}(s) = 0$ 的竖直边界上等于零，绝不可能迈进 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 半步！

> 数学里很多吓人的障碍，只要量一量它的模长，就会发现它连门都进不来。

下面三条 Lean 定理一气呵成地完成了“去掉多余欧拉因子 → 本原反射 → 锁定临界带”的三连击：

引理 1.9（多余欧拉因子在开右半平面绝不为零） LEAN ✓

对任意模 M 的狄利克雷特征 ψ、任意素数 p 以及任意满足 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 的复数 s，均有

$$1 - \psi(p)\, p^{-s} \neq 0.$$

LEAN › `Claim.factor_ne_zero`

证明 由 $|\psi(p)| \le 1$ 与 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 得 $|p^{-s}| = p^{-\mathrm{Re}(s)} < 1$，故 $|\psi(p)p^{-s}| < 1$，不可能等于 1。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

引理 1.10（本原特征零点的临界带反射） LEAN ✓

设 ψ 为模 $M \ge 1$ 的本原狄利克雷特征。若 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 且 $L(\psi, s) = 0$，则

$$L(\psi^{-1}, 1 - s) = 0.$$

LEAN › `Claim.prim_reflect`

证明 因为 $\mathrm{Re}(s) > 0$，狄利克雷 L 函数的伽马因子非零，于是 $L(\psi, s) = 0$ 迫使完备 L 函数 $\Lambda(\psi, s) = 0$。由本原特征函数方程得 $\Lambda(\psi^{-1}, 1 - s) = 0$，再由 $\mathrm{Re}(1 - s) > 0$ 除回伽马因子即得 $L(\psi^{-1}, 1 - s) = 0$。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 1.11（本原特征的半平面到临界线归约） LEAN ✓

若对一切模 $N \ge 1$、一切狄利克雷特征 χ 与一切满足 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 且（$\chi \neq 1$ 或 $s \neq 1$）的 s 均有 $L(\chi, s) \neq 0$，则对每个本原特征 χ，其在临界带 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内的所有零点都满足 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。

LEAN › `Formalism.VW.critLine`

证明 反证假设零点 s 满足 $\mathrm{Re}(s) \neq \frac{1}{2}$。若 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 直接矛盾；若 $\mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$，经由完备 L 函数反射至 $(\chi^{-1}, 1 - s)$，其满足 $\mathrm{Re}(1 - s) > \frac{1}{2}$ 且 $1 - s \neq 1$，再度与右半平面无零点矛盾。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 1.12（任意特征的临界带归约） LEAN ✓

若全部狄利克雷 L 函数在右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$（排除 $\chi = 1, s = 1$）上无零点，则对任意模 $N \ge 1$ 的任意（含非本原）狄利克雷特征 χ，其在临界带 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内的所有零点均满足 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。

LEAN › `Claim.strip`

证明 由 引理 1.9，非本原特征在 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内的任何零点必然也是其诱导本原特征的零点；随后由 引理 1.10 反射至右半平面即得矛盾。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

现在战局已经彻底明朗了。我们不再需要和“恰好等于 $\frac{1}{2}$”较劲，只需要回答一个更干脆的问题：**怎样证明，在 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 的整片右半平面里，没有任何一个狄利克雷 L 函数能碰到零？**

下一章，朗道将把复平面上这群看不见的幽灵，一把拽回到实数轴上的素数账本里。

§ 02

第二章 素数的影子与朗道陷阱：把零点变成符号问题

> 盯着复平面上一个看不见的零点，就像在黑夜里用网兜去扑一只蚊子。聪明人的做法是干脆在实数线上架一杆秤：零点只要敢偏离中线，秤砣就会往一边死沉地压下来。

要清空右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$，直接去解方程 $\zeta(s) = 0$ 几乎是不可能的。复平面那么大，虚部 t 可以一直冲向正无穷，难道我们要沿着 $t = 10^{1000}$ 一个一个去数零点吗？

当然不。我们要把复平面上的零点问题，整体**搬运**到实数轴上——具体来说，变成一条和素数有关的实函数 $G_z(x)$ 的增长界问题。而在整个形式化架构里，担任这个搬运工的核心桥梁是一份看似不起眼的账本：$S_z(x)$ 与 $G_z(x)$。

2.1 手算素数的平滑影子 $G_z(x)$

数素数时，数学家最喜欢的记账员叫**冯·曼戈尔特函数（von Mangoldt function）** $\Lambda(n)$。它的规矩特别干脆：

- 如果 $n = p^k$ 是素数的幂（比如 $2, 3, 4 = 2^2, 5, 7, 8 = 2^3, 9 = 3^2$），它就记一笔 $\Lambda(n) = \ln p$；
- 否则（比如 $6 = 2 \times 3$、$10 = 2 \times 5$），一律记成 0。

为什么不直接数 $1, 2, 3, \ldots$ 而要给每个素数幂加权 $\ln p$？因为素数越往后越稀，密度大约是 $1/\ln p$；乘上 $\ln p$ 恰好把“平均步长”拉平到 1，就像给变速齿轮装上调速器！

可就算用了 $\Lambda(n)$，普通的加和 $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$ 还是每经过一个素数就“啪”地向上跳一格，锯齿太锋利。为了磨平这把锯齿，`StatementOC.lean` 取的是它的一次平滑积分（Cesàro 平均）：

$$S_z(x) = \sum_{1 \le n \le x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} - 1 \right), \qquad G_z(x) = S_z(x) - x \ln x + (1 + \gamma)\, x,$$

其中 $\gamma \approx 0.577216$ 是欧拉–马斯刻若尼常数。减掉光滑主项 $x \ln x - (1+\gamma)x$ 之后剩下的 $G_z(x)$，就是素数分布真正的**波动影子**。

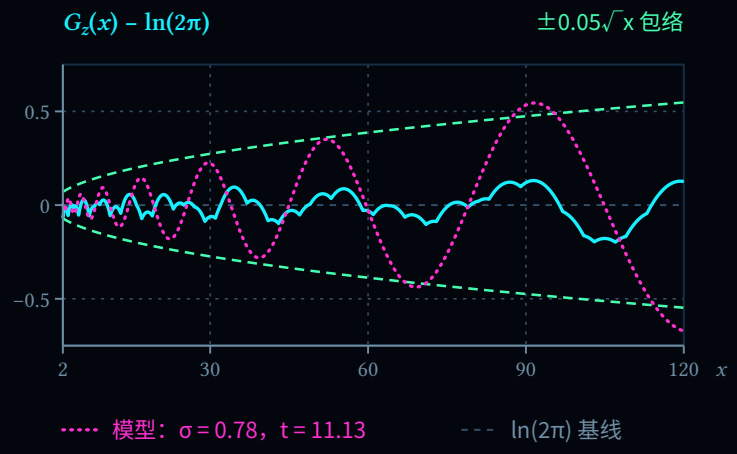
不要光看符号，拿起笔算几个具体的数字！用 $\ln 2 \approx 0.69315$、$\ln 3 \approx 1.09861$、$\ln 5 \approx 1.60944$、$\ln 7 \approx 1.94591$：

- 在 $x = 3$ 处：$n = 2$ 贡献 $\ln 2 \cdot (3/2 - 1) = 0.5 \ln 2 \approx 0.34657$，$n = 3$ 贡献 0，所以 $S_z(3) \approx 0.34657$。减掉 $3 \ln 3 - (1+\gamma) \cdot 3 \approx -1.43581$，得 $G_z(3) \approx +1.78238$。
- 在 $x = 5$ 处：累加 $n = 2, 3, 4, 5$ 得到 $S_z(5) \approx 1.94542$，算下来 $G_z(5) \approx +1.78430$。
- 在 $x = 10$ 处：$S_z(10) \approx 9.11449$，$10 \ln 10 - (1+\gamma) \cdot 10 \approx 7.25369$，所以 $G_z(10) \approx +1.86080$。

- 在 $x = 100$ 处：$S_z(100) \approx 304.51714$，光滑主项是 302.79545，差值依然稳稳停在 $G_z(100) \approx +1.72169$！

注意到没有？哪怕 x 从 3 膨胀到 1000、2000，两个各自飙升到几千的数相减，余下的波动影子 $G_z(x)$ 几乎死死贴着常数 $\ln(2\pi) \approx 1.83788$（这来自 $s = 0$ 处的留数贡献 $\zeta'(0)/\zeta(0) = \ln(2\pi)$）上下轻轻呼吸！

x	$S_z(x)$	**光滑主项** $x\ln x - (1+\gamma)x$	**波动影子** $G_z(x)$	$G_z(x) - \ln(2\pi)$
3	0.34657	−1.43581	+1.78238	−0.05550
10	9.11449	7.25369	+1.86080	+0.02292
30	56.49559	54.71945	+1.77614	−0.06174
100	304.51714	302.79545	+1.72169	−0.11619
1000	5332.16420	5330.63329	+1.53091	−0.30696



素数的波动影子与假想偏离零点的“失控巨浪”。 青色实线是按实际素数幂算出的 $G_z(x) - \ln(2\pi)$，它乖乖贴在水平基线附近；上下两条绿色虚线是 $\pm 0.05\sqrt{x}$ 的包络窗；而一旦存在一个实部为 $\sigma = 0.78$ 的假想零点（品红虚线 MODEL 示意），它激发的振荡项 $-2\,\mathrm{Re}\left(x^{\rho}/(\rho(\rho-1))\right)$ 很快就会刺穿绿色包络。

形式化源码首先验证了 $G_z(x)$ 本身是一条温和的利普希茨（Lipschitz）连续曲线——在任何区间上都不会瞬间暴跳：

定理 2.1（G_z 的利普希茨连续性与线性界） LEAN ✓

存在常数 $K \geq 0$，使得对一切满足 $t, t' \geq \frac{1}{2}$ 的实数，均有

$$|G_z(t)| \leq Kt \qquad \text{且} \qquad |G_z(t) - G_z(t')| \leq K|t - t'|.$$

LEAN › Formalism.zetaPrimeSumErrorLipschitz

证明 证明先借助算术恒等式 $\sum_{n\leq k} \ln n = \sum_{n\leq k} \Lambda(n)\lfloor k/n \rfloor$ 与切比雪夫上界推导出梅尔滕斯和 $\sum_{n\leq k} \Lambda(n)/n \leq \ln k + \ln 4 + 4$。把 $G_z(x)$ 写成关于 x 的分段线性函数减去 $x\ln x$ 后，每一段斜率的绝对值均被 $\ln 4 + 7$ 控制，由此得到对 $t, t' \geq 1/2$ 一致的利普希茨常数。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

2.2 梅林变换与朗道陷阱：为什么单侧界就能封死复平面

现在，把这套实数线上的素数和与复平面上的 $\zeta(s)$ 接上头。接头的电线叫**梅林变换（Mellin transform）**：把时间变量 x 从 1 到 ∞ 乘上 x^{-s-1} 积分起来。对于任意被 $K\Lambda(n)$ 控制的实数列 $a(n)$，对应的平滑和 $S_a(x)=\sum_{1\le n\le x} a(n)(x/n-1)$ 的梅林变换极其漂亮：

定理 2.2（一般冯・曼戈尔特和的梅林变换公式） LEAN ✓

设实数列 $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 与常数 K 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $|a(n)|\le K\Lambda(n)$。则 S_a 可测，对一切 $\sigma>1$ 有 $\int_1^\infty |S_a(x)|\,x^{-\sigma-1}\,dx<\infty$，且对一切 $\mathrm{Re}(s)>1$ 成立

$$\int_1^\infty S_a(x)\,x^{-s-1}\,dx=\frac{1}{s(s-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}.$$

LEAN › Formalism.mellinSgen

证明　利用富比尼定理与控制收敛，把逐项积分的级数和积分次序对调。每一单项 $\int_n^\infty (x/n-1)x^{-s-1}\,dx$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时恰好等于 $\frac{n^{-s}}{s(s-1)}$，逐项相加即得 L-级数除以 $s(s-1)$。完整证明由 Lean 内核检查。∎

特别地，当 $a(n)=\Lambda(n)$ 时，$\sum\Lambda(n)n^{-s}=-\zeta'(s)/\zeta(s)$。再把光滑主项 $x\ln x-(1+\gamma)x$ 的梅林变换 $\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1+\gamma}{s-1}$ 减掉，你会惊喜地发现：右边恰好补出 $-\frac{1}{s-1}$ 的极点抵消项！也就是说，**$G_z(x)$ 的梅林变换在 $s=1$ 处居然连极点都没有，只在 $\zeta(s)$ 真的等于零的地方冒出极点！**

这下轮到朗道（Edmund Landau）的绝招登场了——**非负积分陷阱（Landau's Lemma）**。

打个极其通俗的比方：想象你在一条山谷里沿直线往西走（实轴 $s=\sigma$ 从 b 往左减到 a）。假设你背的包里全是**非负的重量** $H(x)\ge 0$。当积分 $\int_1^\infty H(x)x^{-s-1}\,dx$ 在 $\mathrm{Re}(s)>b$ 解析时，把它在实轴上展开成泰勒级数：

$$\Phi(s_0-r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r)^k}{k!}\Phi^{(k)}(s_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\int_1^\infty(\ln x)^k H(x)\,x^{-s_0-1}\,dx.$$

看每一项前面的符号！积分里 $(\ln x)^k\ge 0$，**而 $H(x)\ge 0$ 没有正负相消的余地**！所以只要 $\Phi(s)$ 在实轴上顺顺当当解析地延拓到 a，这串全正的级数在实轴上就必须收敛——可一旦级数在实数点 $\sigma>a$ 收敛，它在整个半平面 $\mathrm{Re}(s)>\sigma$ 也就跟着绝对收敛，里面**绝对不可能藏着任何复极点**（比如 $\zeta(s)$ 的零点）！

> 只要账本里每一笔都是正数，虚空中的复零点就失去了互相抵消的掩护；它在实轴上迈不出第一步，在复平面上就寸步难行。

Lean 把这份“非负函数实轴延拓必保积分收敛”的硬核分析定理一字不差地证明了出来：

定理 2.3（朗道非负积分引理） LEAN ✓

给定对指数核幂次求导的微分法则 `MellinDeriv`：若 $a<b$，$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $(1,\infty)$ 上可测且 $H(x)\ge 0$，对所有 $\sigma>b$ 有 $\int_1^\infty H(x)x^{-\sigma-1}\,dx<\infty$，且解析函数 Φ 在 $\mathrm{Re}(s)>b$ 上等于该积分并能解析延拓到整个实线段 $(a,b]$，则对一切 $\sigma>a$ 仍有

$$\int_1^\infty H(x)\,x^{-\sigma-1}\,dx<\infty.$$

LEAN › Formalism.landauLemma_of

证明　反证假设收敛横坐标 $\sigma_c \geq a$ 落在 $(a, b]$ 之间。围绕 σ_c 右侧一点展开 Φ 的泰勒级数；由于 $H(x) \geq 0$，每一阶导数对 $(-1)^k$ 都恰为非负积分 $\int_1^\infty (\ln x)^k H(x) x^{-s_0-1}\,dx$。由富比尼/单调收敛把积分和求和交换，迫使积分越过 σ_c 向左推进到某个 $\sigma' < \sigma_c$，与 σ_c 为下确界矛盾。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

现在看看朗道是怎么把 $G_z(x)$ 塞进这个陷阱的！哪怕我们**不知道** $|G_z(x)| \leq Cx^\theta$（双侧界），只要知道**单侧界**——比如 $G_z(x) \geq -Cx^\theta$（或上界 $G_z(x) \leq Cx^\theta$）——就能立刻构造出非负函数

$$H(x) = Cx^\theta + s_0\, G_z(x) \geq 0 \qquad (s_0 \in \{1, -1\}).$$

只要 $H(x) \geq 0$，它的梅林变换在实轴上只在 $s = \theta$（来自 Cx^θ 的 $\frac{C}{s-\theta}$）和已知无实零点的区间外才可能有奇点。而人们早就用手算和级数证明了**实轴区间 $(0, 1)$ 上 $\zeta(\sigma) \neq 0$**（因为 $(1 - 2^{1-\sigma})\zeta(\sigma) = 1 - 2^{-\sigma} + 3^{-\sigma} - \cdots > 0$ 是交错递减正项级数！）。于是 Φ 在实轴 $(\theta, 1]$ 上处处光滑无阻，朗道陷阱瞬间合拢：$\zeta(s)$ 在整个右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \theta$ 一个零点都不许有！

定理 2.4（单侧素数和界推出半平面无零点） LEAN ✓

设 $s_0 \in \{1, -1\}$，$0 < \theta < 1$。若存在常数 $C, x_0 \in \mathbb{R}$ 使得对一切 $x \geq x_0$ 均有

$$s_0\, G_z(x) \leq C\, x^\theta,$$

则对一切 $\mathrm{Re}(s) > \theta$ 的复数 s，均有 $\zeta(s) \neq 0$。

LEAN › Formalism.zetaLandau

证明　将区间 $[1, \max(x_0, 1)]$ 上有界的 $|G_z(x)|$ 并入常数 C，构造对一切 $x \geq 1$ 非负的函数 $H(x) = C'\, x^\theta - s_0\, G_z(x) \geq 0$（注意形式化记号里取 $-s_0$ 对应符号）。借助实轴非零性定理 `zetaRealNonvanish` 与 定理 2.3，其梅林积分收敛至 $\sigma > \theta$。再利用乘积函数 $(s-1)\zeta(s)\zeta(s)\ldots$ 或对数导数在解析区域内的局部展开，若存在零点 ρ 满足 $\mathrm{Re}(\rho) > \theta$，则会导致与积分收敛性矛盾的对数极点。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

推论 2.5（带任意小 ε 损失的朗道判据） LEAN ✓

设 $s_0 \in \{1, -1\}$，$0 \leq \theta < 1$。若对任意 $\varepsilon > 0$ 均存在 C, x_0 使得对一切 $x \geq x_0$ 有 $s_0\, G_z(x) \leq C\, x^{\theta+\varepsilon}$，则对一切 $\mathrm{Re}(s) > \theta$ 均有 $\zeta(s) \neq 0$。

LEAN › Formalism.zetaLandauEps

证明　对任意 $\mathrm{Re}(s) > \theta$，取足够小的 $\varepsilon < \min(\mathrm{Re}(s) - \theta, 1 - \theta)/2$，对 $\theta + \varepsilon$ 直接应用 定理 2.4。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

把视角拉高一点：对一般实特征甚至复特征组合，`StatementOC.lean` 与 `StatementFL.lean` 同样建立了对应的 `OCStep` 与 `FamilyLandauC`——**谁能把 $G_\chi(x)$ 的单侧误差压进 $x^{1/2+\varepsilon}$ 里面，谁就拿下了全部零点！**

VIZ

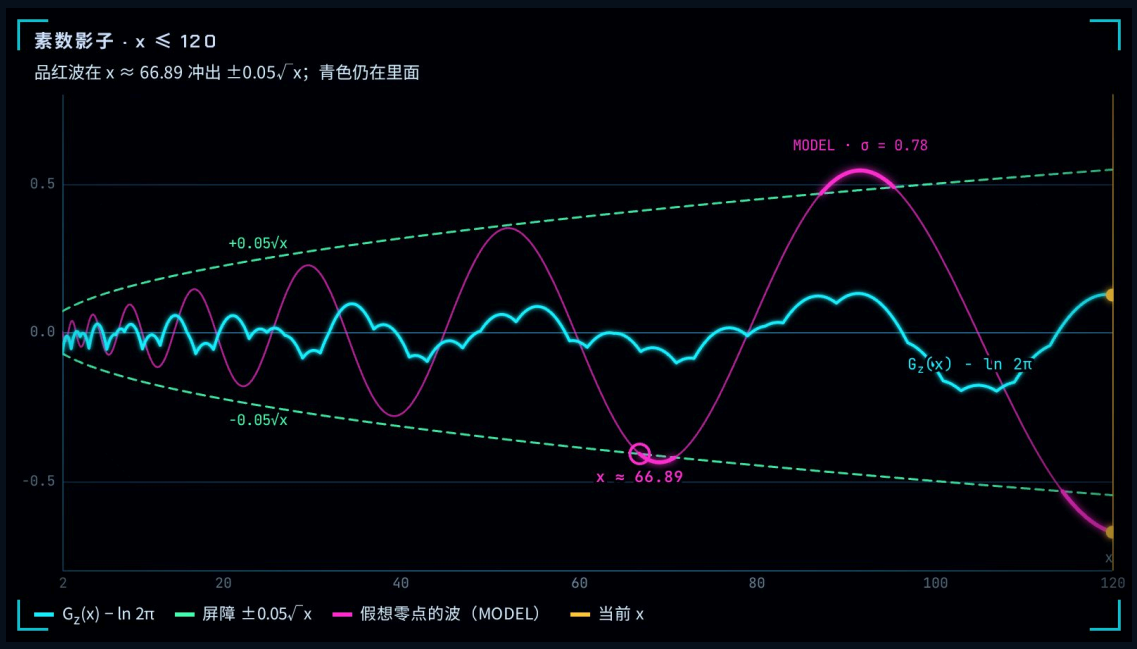


图 3　ZETA//MIRROR · 临界之镜 · Re(s) = 1/2 把离线零点映成孪生，离线零点会冲破 √x 的堤坝

朗道显式公式与偏离巨浪实验： 青色曲线由 $\Lambda(n)$ 实算 $G_z(x)-\ln(2\pi)$（如 $G_z(10)\approx 1.86080$、$G_z(100)\approx 1.72169$），始终稳居虚线 $\pm 0.05\sqrt{x}$ 包络内；而品红 MODEL 波取 $\sigma=0.78, t=11.13$ 时，会在 $x\approx 66.89$ 处率先冲出包络，并在 $x=120$ 摆至 $0.672>0.548$。
交互版本见
http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/critical-mirror/

2.3 百年经典防线在哪里停步：德拉瓦莱–普桑与西格尔定理

在离开经典解析数论进入后面真正的新引擎之前，必须诚实交代两件“一百年前就已经做到、但始终过不了 $\frac{1}{2}$”的经典武器——新证明不但没有绕开它们，反而在底层把它们全套形式化了，作为后续步步推进的弹药。

第一道武器是 1896 年德拉瓦莱–普桑（de la Vallée Poussin）与哈达玛（Hadamard）利用经典三角不等式

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta=2(1+\cos\theta)^2\geq 0$$

打出的**经典无零点区域**。它把零点推离了竖线 $\mathrm{Re}(s)=1$，但随着虚部 $|t|$ 升高，这条边界只能像贴着墙角的小尾巴一样无限逼近 1，永远进不到 $\frac{1}{2}$：

定理 2.6（ζ 函数的经典无零点区域）　LEAN ✓
存在常数 $c>0$，使得对一切满足 $s\neq 1$ 且

$$\mathrm{Re}(s)\geq 1-\frac{c}{\ln(|\,\mathrm{Im}(s)|+2)}$$

的复数 $s\in\mathbb{C}$，均有 $\zeta(s)\neq 0$。

LEAN › Formalism.ZF.zeroFreeRegion

证明　形式化首先证明对数导数局部展开引理 `landauLocal`，随后结合梅尔滕斯不等式、$3+4\cos\theta+\cos 2\theta\ge 0$、右半平面增长界与有界高度无零点检验，得到标准的对数型无零点区域。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

第二道武器是 1935 年西格尔（Carl Ludwig Siegel）针对实狄利克雷特征在 $s=1$ 附近可能存在的“异常实零点”（兰道–西格尔零点）给出的经典下界。没有它，后文需要遍历所有模 q 算术级数的平均估算就会被一个异常的模 q 拖垮：

定理 2.7（西格尔（Siegel）关于 $L(1,\chi)$ 的下界定理）　LEAN ✓

对任意 $\varepsilon>0$，存在常数 $c>0$，使得对一切正整数 $q\ge 1$ 及一切模 q 的非平凡实二次狄利克雷特征 χ（满足 $\chi^2=1$ 且 $\chi\neq 1$），均有

$$\|L(\chi,1)\|\ge c\,q^{-\varepsilon}.$$

LEAN › Formalism.ZeroFreeDirichlet.siegelLower

证明　经由构造辅助乘积 L-函数并对其在实轴上的系数和极点残数建立关键不等式 `bqKey`，分“存在接近 1 的异常实零点”与“不存在异常实零点”两种情形分别控制 $L(1,\chi)$ 的下界。注意这里的常数 c 照例是非有效（ineffective）的，但这已足够支撑后续的西格尔–瓦尔菲什（Siegel–Walfisz）型分布定理。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

好了，经典解析数论的弹药箱已经摊开。为什么依靠三角不等式和单条对数导数的老办法，一百多年来连 $\mathrm{Re}(s)\le 0.99$ 都突破不了？

因为 $3+4\cos\theta+\cos 2\theta\ge 0$ 只是**一次函数级的正定性**——它眼里只有素数和的一阶震荡，根本没有利用整数世界背后潜伏的**高重数对称**。

> 老方法之所以撞墙，不是因为素数太少，而是因为它只拿一把一厘米宽的尺子去量整片海洋。

下一章，我们看看有限域里的绝杀武器——斯捷潘诺夫的“高重数求导术”，以及如何把它强行塞进不能直接求导的整数世界里。

VIZ

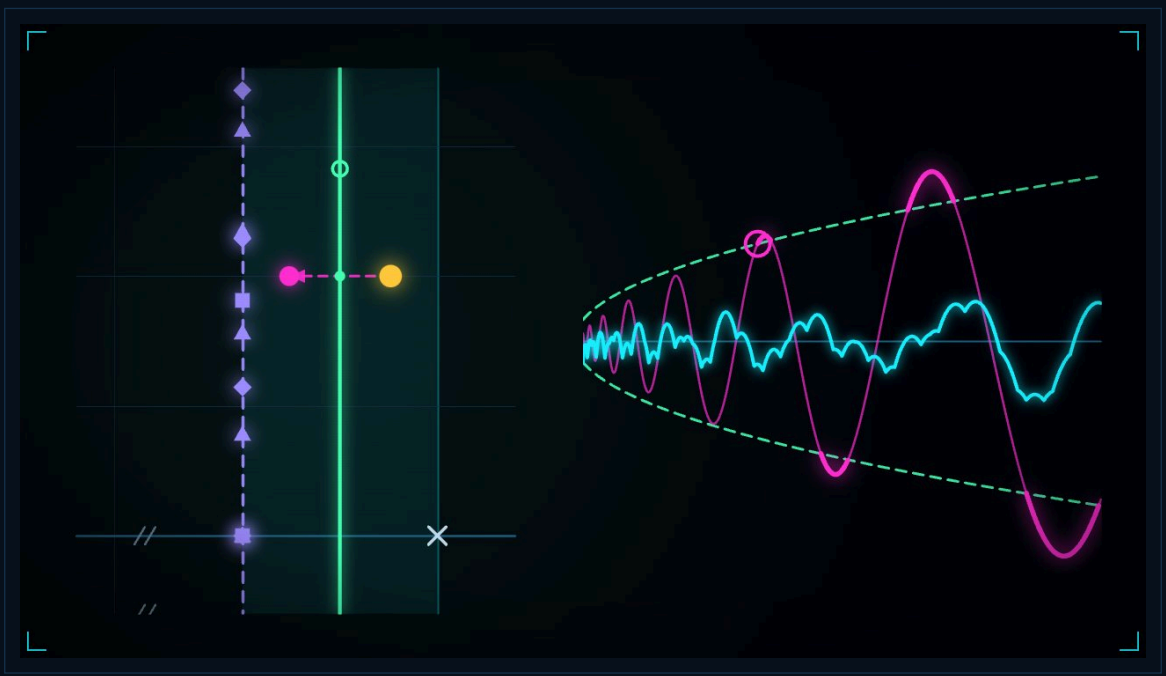


图 4 ZETA//MIRROR · 临界之镜 · Re(s) = 1/2 把离线零点映成孪生，离线零点会冲破 √x 的堤坝

完整的复平面镜像与素数影子实验室：在复平面镜像与素数波动影子之间自由切换，拖动检验零点 $\rho = \sigma + it$，对比在临界线上（`on-line`）、偏离临界线（`off-line`）、不本原欧拉零点（`imprimitive`）与朗道失控巨浪（`landau-trap`）四种情景。数值仅在页面演示，定理依据由 Lean 内核核验。交互版本见 http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/critical-mirror/

§ 03

第三章 给整数求导：斯捷潘诺夫行列式与高重数梦境

> 如果世界只是多项式，那一切都有导数可求、有重根可数；可整数偏偏是一块坚硬的石头——你只能先把它放进几何，石头才会长出切线。

为什么黎曼猜想在“有限域的函数世界”里早就被证明了？

把整数换成有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的曲线（比如 $y^2 = x^3 + x$），那里的黎曼猜想分别被韦伊（André Weil）、德利涅（Pierre Deligne）以及斯捷潘诺夫（Sergei Stepanov）攻克。尤其是斯捷潘诺夫在 1969 年的证明，简直像一场魔术——只有短短几页初等代数，连上同调的影子都不用碰。

这场魔术的秘密就两个字：**重数（multiplicity）**。

3.1 斯捷潘诺夫魔术：为什么要造高阶零点

拿一个极简单的例子看懂斯捷潘诺夫怎么数点。假设你想控制一条有限域曲线上有多少个有理点。如果只造一个普通多项式 $P(x)$，让它在每个点取值为 0（重数 $m = 1$），你最多只能说“点不能超过多项式的次数”，算来算去正好撞上平凡界，一点便宜也占不到。

可如果你能强迫 $P(x)$ 在每一个有理点不仅自己为 0，**连它的一阶导数、二阶导数……一直到第 $(m-1)$ 阶导数全都是 0**，情况就翻天覆地了！

每个点一下子抵得上 m 个根。只要 P 不是恒零多项式，就有经典的天平不等式：

$$m \times (\text{点的个数}) \le \deg P.$$

重数 m 越做越大，点数的误差上限就被 m 生生砍成原来的 $1/m$！打个直观比方：同样一张长度 100 的菜单，如果每个菜只占 1 格，能摆 100 道菜；要是你规定每道菜必须连占 $m = 10$ 格，房间里最多就只能塞下 10 道菜。

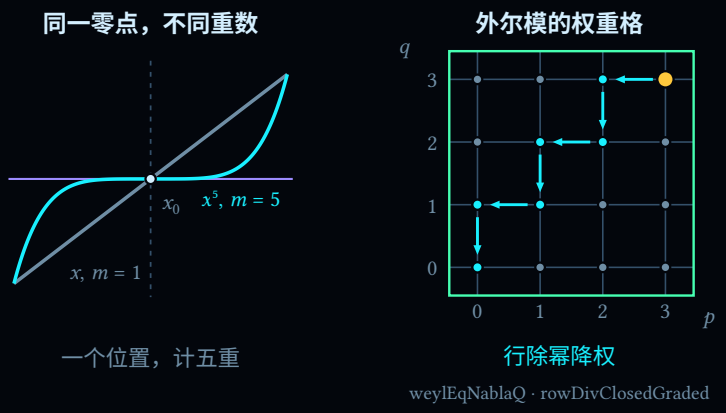
> 单次计数只管得了门槛，高重数才管得了人群；可离开多项式，谁允许你对整数求导？

这就是拦在所有数论学家面前一百五十年的**离散高墙**：有限域的多项式环里，导数 $\frac{d}{dx}$ 是天生免费的；可在普通的整数 $\mathbb{Z}$ 与素数面前，你怎么“对一个整数求导”？n 和 $n+1$ 之间隔着无法连续缩小的空隙，普通微积分一脚踏进来就踩空了。

3.2 在不能求导的地方造出导数：二次型、CM 曲线与分次外尔模

要让整数也长出“导数”和“重数”，这套证明做了两件表面上看风马牛不相及、底层却通向同一个几何机制的改造：

1. **几何化身：把指数和变成二次型，把整数挂到 CM 椭圆曲线上。**面对素数或特征指数和，先通过反复使用帕塞瓦尔（Parseval）等式与“路径二次型”（$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{k-1}x_k$），把难以直接捉摸的特征平均，变成一组双线性配对；而在带有复乘法（CM）的椭圆曲线上，不变微分算子 D 满足 $D^p \equiv 0 \pmod p$（对惰性素数 p），像在有限特征里自带“天然杀导数开关”一样，让泰勒展开的系数自动被素数幂整除！
2. **代数骨架：用“行除幂算子”与福克空间替导数守门。**在纯代数层面，如果我们要造出一个带有 m 阶“整除重数”且绝对不会在有理系数之外散架的多项式/矩阵空间，就必须确保把矩阵行之间按分步降阶求导（除以阶乘的 **除幂算子** `rowDiv`）反复作用之后，整数格子仍然闭合不散！



左：一阶穿越与 m 阶贴轴的差别；右：分次外尔模与福克正定阶梯。左栏中，青色曲线 $(x - x_0)^5$ 在根处贴着横轴平躺，单个根抵得上五个线性根的次数预算；右栏中，从顶角最高权（琥珀色）出发，每一次分次行降阶算子 `rowDiv` 都沿着格点向下移动一格，并在青色福克正交结构下严格留在绿色外尔模边界之内。

让我们在纸面上亲自摸一下右图里的这台“整数求导机”（分次外尔整除性 `GradedWeylDivisibility`）。想象一块 $r \times n$ 的变元矩阵 $X = (x_{a,j})$：列指标 j 记录多项式的权重 ν，行指标 a 记录对称性。普通导数 $\partial/\partial x$ 在遇到 x^5 时会吐出一个系数 5——如果在特征 p 或者整环 $\mathbb{Z}$ 上做算术，这个吐出来的因子很烦人，因为它会把分母搞乱。

数学家的办法是改用**除幂算子（divided-power operator）** $\frac{1}{k!}D^k$：作用在 x^k 上直接给出干净的 1，绝不带多余的阶乘碎片。可问题来了：你怎么保证由这些最高权向量的“除幂降阶”生成的整体格（外尔模 `weyl`），和由对称不变方程刻画的整体格（对偶外尔模 `dualWeyl`），在有理数乃至整数倍的意义下恰好对得严丝合缝？

这里登场的是量子物理学家再熟悉不过的老朋友——**福克内积（Fock / Fischer inner product）**。两个多项式 f, g 的福克内积记作

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{Fock}} = \sum_{m} f_m\, g_m \prod_{k} (m_k!),$$

其中 m 遍历所有单项式，系数乘上对应次数的阶乘积！你看这多像量子谐振子的阶梯算符：乘以变量 x_k 是“升阶”，求导 $\partial/\partial x_k$ 是“降阶”，而那串阶乘 $\prod m_k!$ 恰恰保证了求导与乘法、乃至任意行除幂算子 `rowDiv a b k` 与它的反向算子 `rowDiv b a k` 互为精确伴随！

以下是 Lean 内核在 `FinalB.lean` 验真的一整串代数齿轮：

引理 3.1（有理福克内积的对偶对称与严格正定性） LEAN ✓

对任意指标集 σ 与任意有理系数多元多项式 $f, g \in \mathbb{Q}[X_\sigma]$，有理福克配对满足对称性 $\langle f, g\rangle_{\mathrm{Fock}} = \langle g, f\rangle_{\mathrm{Fock}}$，且只要 $f \neq 0$，必有

$$\langle f, f\rangle_{\mathrm{Fock}} > 0.$$

LEAN › Formalism.GradedWeylDivisibility.fockQPos

证明 展开表达式 $\sum_m f_m^2 \prod_k m_k!$，每一项阶乘严格为正；只要 $f \neq 0$，至少存在一个支持集指标 m 使得 $f_m \neq 0$，从而平方和严格大于零。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

引理 3.2（行除幂算子的福克伴随律） LEAN ✓

对任意整数 $r, n \in \mathbb{N}$、任意行指标 $a, b \in \{0, \ldots, r-1\}$、任意阶数 $k \in \mathbb{N}$ 及任意多项式 $f, g \in \mathbb{Q}[X_{r\times n}]$，成立

$$\langle \mathrm{rowDiv}^{(k)}_{a,b}(f),\, g\rangle_{\mathrm{Fock}} = \langle f,\, \mathrm{rowDiv}^{(k)}_{b,a}(g)\rangle_{\mathrm{Fock}}.$$

LEAN › Formalism.GradedWeylDivisibility.fockQRowDivAdj

证明 借助阶乘权重的组合恒等式，把单项式基底上“从第 b 行抽走 k 次幂并转移到第 a 行”的系数对比与反向转移对齐，逐项验证线性算子伴随关系。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

引理 3.3（除幂闭合子空间自动按行权重分次） LEAN ✓

设 $M \subseteq \mathbb{Q}[X_{r\times n}]$ 是在全部行除幂算子 $\mathrm{rowDiv}^{(k)}_{a,b}$ 作用下闭合的 $\mathbb{Q}$-子模。则对任意 $f \in M$ 及任意行权重 $\mu : \mathrm{Fin}\, r \to \mathbb{N}$，$f$ 在权重 μ 上的齐次分量仍然属于 M。

LEAN › Formalism.GradedWeylDivisibility.rowDivClosedGraded

证明 对角化行拉伸算子（实际上只需提取各行总次数的幂次与欧拉算子），利用除幂闭合性在无限域 $\mathbb{Q}$ 上作范德蒙德（Vandermonde）插值，即可逐个剥离出任意单一权重 μ 的齐次分量。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

把上面三块拼到一起，正交补就无处可逃了：如果外尔子模 W 比对偶外尔模 ∇ 小，取正交补 $W^{\perp}$，由正定性与伴随律，它里面必然藏着一个被所有升阶算子消灭的“第二条最高权直线”——可最高权直线在同权之下唯一，它已经躺在 W 里了！所以正交补只能是零！

定理 3.4（有理数域上的分次外尔对偶重合定理） LEAN ✓

对任意自然数 $n \leq r$ 及任意单调不增的权向量 $\nu : \mathrm{Fin}\, n \to \mathbb{N}$，有理外尔模与对偶外尔模完全重合：

$$\mathrm{weyl}_{\mathbb{Q}}(r, n, \nu) = \mathrm{dualWeyl}_{\mathbb{Q}}(r, n, \nu).$$

LEAN › Formalism.GradedWeylDivisibility.weylEqNablaQ

证明　在有理福克内积（引理 3.1）下，外尔模是含最高权向量的最小除幂闭合子模。由除幂伴随律（引理 3.2）与分次分解（引理 3.3），任何正交补中的非零元素必能提升至一个最高权向量；而最高权线唯一且已在 `weyl` 中（`hwLine`），故正交补必为零，两者相等。完整证明由 Lean 内核检查。∎

推论 3.5（整对偶外尔模的整数倍可控定理）　LEAN ✓

对任意 $n \le r$、任意反单调权 ν 及任意整系数对偶外尔模元素 $f \in \mathrm{dualWeyl}_{\mathbb{Z}}(r,n,\nu)$，存在非零整数 $c \neq 0$，使得

$$c \cdot f \in \mathrm{weyl}_{\mathbb{Z}}(r,n,\nu).$$

LEAN › `Formalism.GradedWeylDivisibility.weylRational`

证明　将整多项式 f 映射到 $\mathbb{Q}$ 中落入 $\mathrm{dualWeyl}_{\mathbb{Q}}$，由 定理 3.4 写成有理外尔基元的有限线性组合，清去公分母 $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 即返回整外尔模。完整证明由 Lean 内核检查。∎

你看清这台机器的用途了吗？**它保证无论整除重数叠得多高，整系数结构永远不会在除法过程中漏出有理分母的窟窿。**

可光有这台抽象的整除引擎还不够——在真正面对长度高达 X 的素数和 $\sum_{n\le X}\Lambda(n)(X/n-1)$ 时，我们上哪儿去连造几百、几千甚至 $m \sim \sqrt{X}$ 阶“彼此嵌套的自守导数”呢？

> 当单个空间给不出足够的重数，唯一的出路不是硬挤同一把尺子，而是把一连串空间首尾相接，让每一次跃迁替你多求一次导。

下一章，我们将目睹整座证明最令人屏息的一步：用一条由 $\sqrt{X}$ 面镜子组成的 **Theta 提升链**，在自守形式的世界里原生地造出 $\sqrt{X}$ 阶重数。

§ 04

第四章 $\sqrt{X}$ 面镜子：迭代 Theta 提升与跷跷板法则

> 一面镜子只能把人照一遍；把 $\sqrt{X}$ 面镜子首尾排成一条长廊，每一次折射都在替你多求一次导——而走到走廊尽头时，跷跷板轻轻一翻，竟把原本缠住每个特征的绳索一把解开。

整座证明里最让人拍案叫绝的一句话，就出现在作者宣布工作成果的短记里：面对长度为 X 的冯·曼戈尔特素数和，应该把 Theta 提升首尾相连多少次，才能在自守形式的世界里原生地模拟“高阶求导的重数 m”？

答案是：

$$m \sim \sqrt{X}.$$

退后一步想想，为什么偏偏是 $\sqrt{X}$？

如果整段素数和里有 X 个自然数在晃动，你要靠“高重数”把它们按在临界线 $\sigma = \frac{1}{2}$ 附近，重数 m 绝不能只是 2、3 或者 $\ln X$——一个常数阶的重数就像拿玩具小铲子去拦钱塘江大潮。反过来，如果你贪心地让 m 太大（比如 $m \sim X$），那每一步提升累积起来的体积、能级和高度成本就会当场把整座塔压垮！只有在 $m \sim \sqrt{X}$ 这条刀锋平衡线上，“重数赢得的相消深度”才恰好和“整链条付出的高度代价”咬合成完美比例，让你在第五章胶合出直指 $\frac{1}{2}$ 的窗口！

4.1 什么是 Theta 提升链：多照一面镜子，就多一层导数

先把“定酉群上的 Theta 提升”翻译成普通人一眼就懂的画面。

别被“全定酉群 $U(X_j)$”四个字吓住。“全定（totally definite）”在几何上反而是**最温柔、最紧凑**的那一类群——不像在无穷远边界发散的双曲群，它在无穷远素位上是一个紧群（就像一只封闭圆润的球面），所以上面的自守形式其实只不过是在有限个厄米特格（Hermitian lattice）类代表上定义的有限维向量函数！

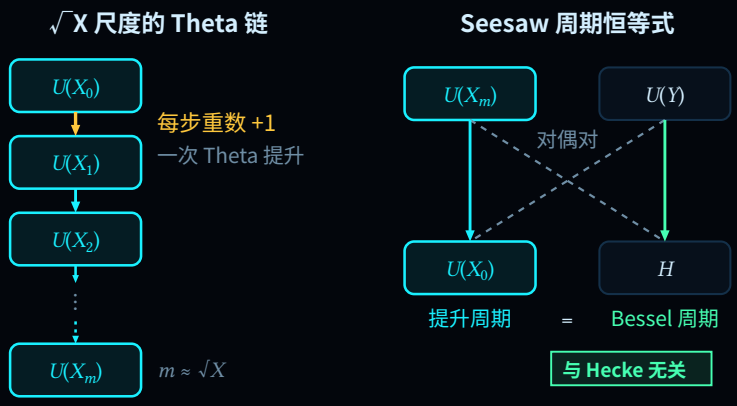
每做一次 Theta 提升 $U(X_j) \to U(X_{j+1})$，干的是什么事？你可以把它看成一台“双核投影仪”：左边站着一群在 $U(X_j)$ 上算账的函数 f，中间挂着一块在两群乘积上写好的核矩阵 Θ，经过有限个格代表点求和：

$$(\text{提升后的函数})(y) = \sum_{i} w_i \, f(i) \, K_j(i, y).$$

在表示论的语言里，一次提升把原本的自守表示 π 换成了 $\pi \boxplus \mu_j[t]$——多塞进了一根与赫克特征 μ_j 相伴的“重数线”。当你把这样的核矩阵 $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$ 一环扣一环串联起来，从 $U(X_0)$ 一路提升到 $U(X_m)$：

$$U(X_0) \longrightarrow U(X_1) \longrightarrow U(X_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow U(X_m),$$

这串迭代锁链就原生生成了**阶数高达 m 的相消与重数**，完全不需要人为硬去对整数做做不到的普通微积分求导！



左：长度为 $m \sim \sqrt{X}$ 的迭代 Theta 提升链；右：把提升周期翻成无特征依赖的贝塞尔周期的跷跷板图。 左栏展示从基空间 $U(X_0)$ 出发，每一节绿色核矩阵提升都为自守形式叠加一层重数（青色节点依次抬升，琥珀色标出当前传递环节），直到抵达第 m 阶群 $U(X_m)$；右栏画出跷跷板菱形对偶，把左斜边上依赖赫克特征的迭代提升周期，对称翻转为右斜边上与赫克特征无关的贝塞尔（Bessel）周期。

Formalism 里的 `ChainScalar.lean` 和 `LatLiftIndep.lean` 用极其清爽的有限维线性代数，把这条长链的两项核心不变性焊死了：

1. **整链条不会越出整数/子模边界**（迭代伴随链在整条 m 步链上保持子模闭合）；
2. **提升结果不挑具体怎么选格代表元**（格类代表元的任意等距替换，总和一分不差）；
3. **有限域高斯算子的完美可逆对称**（用于把特征求和转换为对称内积时的核心标度 $|\mathbb{F}|$）。

引理 4.1（迭代降阶链的伴随保持子模不变性） LEAN ✓

设 $T_j : E_{j+1} \to E_j$ 是一列有限维内积空间之间的线性映射，$S_j \le E_j$ 为一列子模。若每一步的伴随算子都把 S_j 映入 S_{j+1}（即 $\forall x \in S_j,\ T_j^*(x) \in S_{j+1}$），则对任意链长 $m \in \mathbb{N}$ 及任意 $x \in S_0$，沿着复合链走到底的伴随像仍落在终点子模中：

$$(\mathrm{downChain}_T(m))^*(x) \in S_m.$$

LEAN › `Formalism.ThetaLiftIndependence.ChainScalarLemmas.mem`

证明　对链长 m 作数学归纳：$m = 0$ 时伴随恒等映射留在 S_0；由 $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$ 把第 $m+1$ 步拆成先走前 m 步再作用 T_m^*，直接由归纳假设与单步不变性完成。完整证明由 Lean 内核检查。∎

定理 4.2（格提升求和不依赖于类代表元选取） LEAN ✓

设 K 为数域，V 为 K-向量空间，h 为 V 上的埃尔米特型。若函数 f 与核 Θ 均在等距群 $\mathrm{Isom}(h)$ 的作用下不变，则对格 L 的任意两组合法的整类代表元集 s, s'，加权格提升和完全相等：

$$\mathrm{latLift}(h, s, f, \Theta) = \mathrm{latLift}(h, s', f, \Theta).$$

LEAN › `Formalism.ThetaLiftIndependence.latLiftIndep`

证明　任意两组类代表元集 s 与 s' 之间都可以通过等距群作用建立双射（若存在两组群元素把同一格映过去，轨道稳定子对齐保证逆映射唯一配对）；结合权重、f 与 Θ 的 $\mathrm{Isom}(h)$-不变性，两套求和逐项相等。完整证明由 Lean 内核检查。∎

定理 4.3（有限域高斯核算子的对偶反演律）　LEAN ✓

设 $\mathbb{F}$ 为有限域，ψ 为其上的非平凡加法特征，$\rho : \mathbb{F}^\times \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 为群表示。若向量 $v \in V$ 满足 $\sum_{c\in\mathbb{F}^\times} \rho(c)v = 0$，则高斯算子与它的对偶算子互相复原，且恰好缩放有限域的阶数 $|\mathbb{F}|$：

$$\mathrm{gaussOp}(\psi,\rho)\big(\mathrm{gaussOpDual}(\psi,\rho)(v)\big) = |\mathbb{F}|\cdot v, \qquad \mathrm{gaussOpDual}(\psi,\rho)\big(\mathrm{gaussOp}(\psi,\rho)(v)\big) = |\mathbb{F}|\cdot v.$$

LEAN › `Formalism.ThetaLiftIndependence.final_gaussOp`

证明　展开两重高斯算子的求和并用加法特征正交关系：当乘子 $a = 1$ 时贡献 $|\mathbb{F}| - 1$，其余 $a \neq 1$ 的高斯和与 $\sum_{c\neq 0} \rho(c)v = 0$ 配对后正好补出最后的 $+1$，合为标量乘法 $|\mathbb{F}|\cdot v$。完整证明由 Lean 内核检查。∎

4.2 跷跷板法则、大胞腔主子式与形式次数

好了，现在整条 $\sqrt{X}$ 层的提升链已经搭到终点 $U(X_m)$ 上了。可你马上会遇到一个棘手的问题：**在 $U(X_m)$ 上直接算周期积分，里面还缠着一连串挑好的赫克特征 $\mu_1, \dots, \mu_m$！** 特征一多，上界就越缠越死，根本没法做独立下界估计。

怎么一把甩掉这串粘人的赫克特征？

答案叫**跷跷板法则（Seesaw identity）**，或者说是拉利斯（Rallis）内积公式的一记神来之笔。

玩过跷跷板的人都知道：左边一个胖孩子和右边一个瘦孩子坐在同一根横梁上，你想量左边那个孩子有多重，不必把秤硬塞到他屁股底下，只需站在右边称出对偶端那块配重有多沉就行了！在双群对偶（dual reductive pair）组成的菱形跷跷板上：

- **左斜边**记录的是“顺着链条一路提升 m 次之后的自守积分周期”，它明显牵扯着那一串特征；
- **右斜边**则是把同一组自守积分“在另一条对偶腿上压扁”，把它直接变成大群体上的一枚**贝塞尔周期（Bessel period）**——神奇的是，这个贝塞尔周期里**干干净净，半点都不依赖那一串赫克特征了**！

不过，跷跷板能稳稳立住、而且左边的正定范数能反过来压出右边整除下界，还必须算准另外两笔硬账：一是分片积分时主胞腔（big cell）上的坐标变换和行列式主子式，二是离散系列表示（discrete series）的**形式次数（formal degree）**——它决定每一级提升在积分测度里到底值多少权重。

以下两条定理由 `FinalBF.lean` 与 `FdegFactorial.lean` 精确刻画：

定理 4.4（大胞腔坐标下的顺序主子式与双向量配对）　LEAN ✓

设 $k, r \in \mathbb{N}$，$z, z' \in \mathbb{C}^{2r+k+1}$ 满足各向同性配对条件 `inWb`，对任意参数 $c \in \mathbb{C}^r$ 与内部酉块 $\mu \in M_{k+1}(\mathbb{C})$ 构造的大胞腔元素 `bigCell k r c μ`，其第 l 阶顺序主子式精确等于前 l 个对角参数之积

$$D_l\big(\mathrm{bigCell}(k,r,c,\mu)\big) = \prod_{a<l} c_a,$$

且当各 $c_a \neq 0$ 时，比值子式精确还原出 c_a，配对核函数亦由标准埃尔米特双线性型直接给出。

LEAN › Formalism.QuantumDeterminants.bigCellMinors

证明 在经过 inWb 标架约化的基底下，大胞腔矩阵呈现清晰的块上/下三角与对角乘积结构；利用分块行列式分解即可逐阶算出全部顺序主子式与比值，并把核函数化归为标准埃尔米特配对。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 4.5（哈里什–钱德拉（Harish-Chandra）离散系列的形式次数公式） LEAN ✓

对任意正整数 $n \in \mathbb{N}$ 与严格递减的哈里什–钱德拉参数 $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_{n-1}$，离散系列表示的形式次数精确等于参数差的范德蒙德乘积除以连续阶乘之积：

$$\mathrm{fdeg}(\lambda) = \frac{\prod_{0 \le a < b < n} (\lambda_a - \lambda_b)}{\prod_{i=0}^{n-1} i!}.$$

LEAN › Formalism.QuantumDeterminants.fdegDimV

证明 因为参数严格递减，所有绝对值 $|\lambda_a - \lambda_b|$ 均简化为 $\lambda_a - \lambda_b$；再把按行、按列重排的二重积 $\prod_{a<b}(b-a)$ 精确算成 $\prod_{i=0}^{n-1} i!$（formal_degree_factorial_holds），即得维数/形式次数闭式。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

读到这里，链条有了，跷跷板也架好了。可真正算完这笔“每提升一次要花多少钱”的成本账时，数学家们立刻被泼了一盆冷水——

如果老老实实只用单条提升链、不去动用一整族赫克特征的“胶合”，整座证明在 $\sigma = \frac{2}{3}$ 处就会彻底耗尽预算！

> 任何孤立的好办法走到极限，都会撞上一道刚性的分数天花板。$\frac{2}{3}$ 不是偶然的数字，它是单兵作战的账本上限。

下一章，我们就来算一笔惊心动魄的几何账：用格斜率和博斯特不等式看清为什么 $\frac{2}{3}$ 卡得那么死，再用跨特征胶合一举把它砸穿到 $\frac{1}{2}$！

VIZ

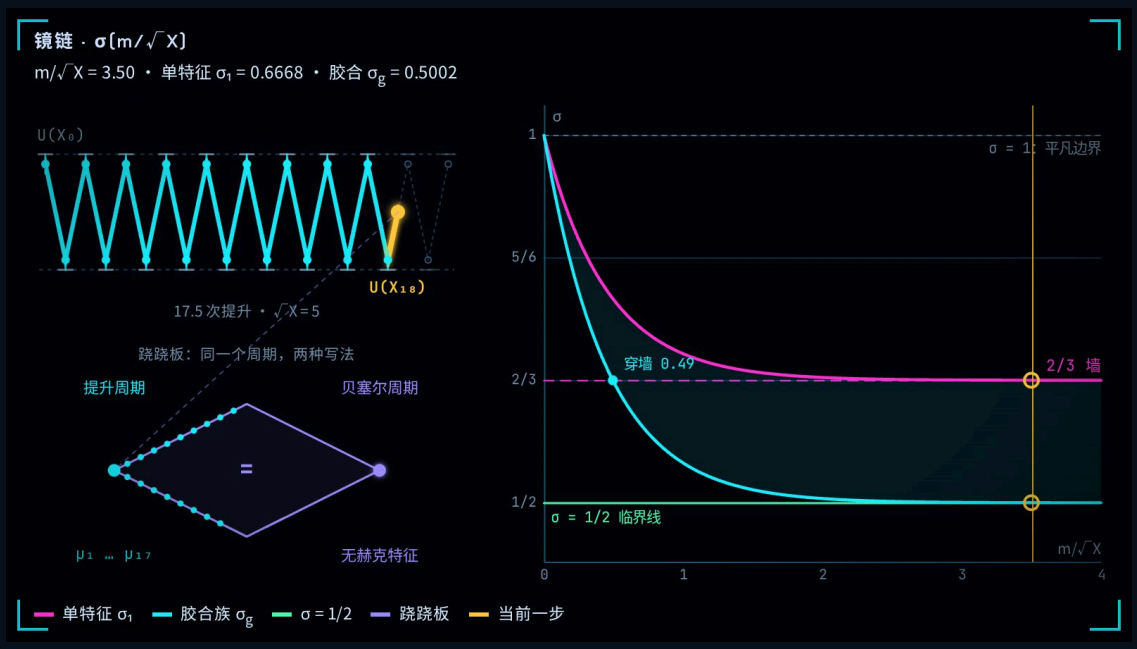


图 5　THETA//SLOPE · Theta 链预算 · √X 面镜子单打独斗卡在 2/3，胶合一族才把屋顶压平

$\sqrt{X}$ 级联镜廊与 $\frac{2}{3}$ 天花板实验：左侧给出从 $U(X_0)$ 到 $U(X_m)$ 的迭代提升走廊与紫色跷跷板菱形（把带赫克特征的提升周期翻成无特征依赖的贝塞尔周期）；右侧的 MODEL 阈值曲线显示单特征模型停滞在 $\frac{2}{3}$，而当胶合正交参数到达并跨越阈值、深度推至 $b = m/\sqrt{X} = 3.5$ 时，青色胶合曲线跌至 0.5002 逼近 $\frac{1}{2}$。

交互版本见

http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/theta-chain-budget/

§ 05

第五章 冲破 2/3 天花板：格斜率、博斯特不等式与积分胶合

> 每个人单独攒钱，攒到三分之二就会被利息吃光；把整条街的账本胶合在一起，拿彼此正交的余数去摊薄成本，那最后六分之一的悬崖才终于垮塌下来。

第四章结束时我们撞上了一件无比诚实、也无比扎眼的事：**单靠一条孤立的迭代 Theta 提升链，整套不等式在 $\sigma = \frac{2}{3}$ 处会准时熄火**。

顺便一提，如果你关注过解析数论的历史，大概不会对 $\frac{2}{3}$ 这个分数感到陌生——从各种单变量均值、零点密度到切比雪夫式多面体截断，无数看似毫不相干的经典路线总爱在 $\frac{2}{3}$ 或者 $\frac{3}{4}$ 附近原地打转。这里的道理一点也不玄：每向上提升一次，形式次数（formal degree）与等距群上的整点范数确实会送给你一份整除收益；可与此同时，格子的**余体积（covolume）与能级高度成本**也跟着往上涨！算一遍账你就明白，单独拎一个赫克特征来做单线提升，收益的指数和成本的指数一抵消，最高只能推平到 $\sigma = \frac{2}{3}$，再往 $\frac{1}{2}$ 迈一步就会入不敷出。

怎么把成本降下来？答案就两步：**先用“格斜率”把成本账量到毫厘不差，再把整族特征“胶合”成一根公共的整骨架**。

5.1 格子的屋顶：什么是 Harder–Narasimhan 最大斜率？

别被“Harder–Narasimhan 滤过”和“博斯特（Bost）斜率不等式”这两个大词唬住。它们讲的其实是一个小学算术就能摸清的“屋顶与短向量”故事。

把一个 r 维整格（lattice）$L \subset E$ 想象成一座盖在欧氏空间 E 里的仓库：

- 它的维度（秩）是 $\mathrm{rk}(L)$；
- 它的基本平行多面体体积叫**余体积** $\mathrm{covol}(L)$。如果格点都很挤，余体积就特别小；如果格点稀稀拉拉，余体积就特别大。

为了把乘法变成加法，数学家给每个子格 $N \le L$ 定义一个叫**度数（degree）**的量，再除以秩，就得到这条子格的**斜率（slope）**：

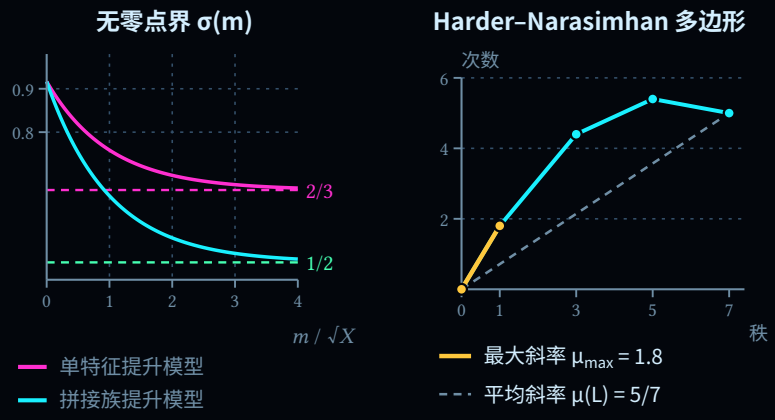
$$\deg(N) = -\ln \mathrm{covol}(N), \qquad \mu(N) = \frac{\deg(N)}{\mathrm{rk}(N)}.$$

记住一个直觉就够了：**子格越紧凑（余体积越小），它的“度数”就越高，屋顶斜率 $\mu(N)$ 就越陡峭！** 而整个格 L 所有非零子格斜率的上确界，叫做最大斜率 $\mu_{\max}(L)$。

来手算一个具体的四段小例子！假设一个秩为 7 的格 L，里头嵌套着一串饱和子格 $0 = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset L_4 = L$，对应的 $(\mathrm{rk}, \deg)$ 坐标依次是：

- $(0,0) \to (1,1.8)$：第一段斜率 $\mu_1 = 1.8/1 = 1.8$（极其紧凑的短向量方向！）；
- $(1,1.8) \to (3,4.4)$：第二段增量斜率 $(4.4-1.8)/(3-1) = 1.3$；
- $(3,4.4) \to (5,5.4)$：第三段增量斜率 $(5.4-4.4)/(5-3) = 0.5$；
- $(5,5.4) \to (7,5.0)$：第四段增量斜率 $(5.0-5.4)/(7-5) = -0.2$。

把这四个点连成折线，你看到什么？斜率 $1.8 > 1.3 > 0.5 > -0.2$ 一步步严格递减，**像一座严格向上凸起的拱形屋顶！** 整个格子的平均斜率只有 $5.0/7 \approx 0.714$，可最左侧那一根“屋脊”就已经把 $\mu_{\max}(L) = 1.8$ 顶到了天上——而这根屋脊斜率，反过来立刻逼出一个长度极短的非零整格向量！



左：单特征提升在 2/3 撞墙与多特征胶合击穿至 1/2（示意模型 MODEL）；右：Harder–Narasimhan 凸斜率多边形。 左栏中，品红实线展示单特征提升在 $m \sim \sqrt{X}$ 后依然平滞在 $\sigma = 2/3$ 上方，而青色胶合曲线越过该水平墙并逼近绿色的 $\sigma = 1/2$ 临界线。右栏按 $(\mathrm{rk}, \deg)$ 实算点 $(0,0), (1,1.8), (3,4.4), (5,5.4), (7,5.0)$ 绘制斜率多边形：琥珀色标出最陡首段 $\mu_{\max} = 1.8$，灰色虚线为总平均斜率 $5.0/7 \approx 0.714$。

Formalism 的 `ExistsSaturatedSlopeEqMuMax.lean` 已经把这套“格斜率几何”从基石开始全部打进了 Lean 内核：

定理 5.1（格斜率集合有上界与最大斜率控制） LEAN ✓

对任意有限维实内积空间 E 中的离散子模（整格）$L \le E$，其所有非零子格的斜率集合 $\mathrm{slopes}(L)$ 必有上界；且对任意非零子格 $N \le L$，恒有

$$\mu(N) \le \mu_{\max}(L).$$

LEAN › `Formalism.F.slopesBdd` `Formalism.F.slopeLeMuMax`

证明 借助格拉姆（Gram）行列式在正交投影与基底替换下的乘积上界 `gramDetLe`，先证明所有子格的余体积存在由向量范数下界决定的统一正下界，从而 $-\ln \mathrm{covol}(N)/\mathrm{rk}(N)$ 一致有上界；随后由上确界定义直接得到每个子格斜率不超过 $\mu_{\max}(L)$。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 5.2（闵可夫斯基短向量存在定理） LEAN ✓

对任意有限维实内积空间 E 中的非零离散格 $L \le E$，必存在非零向量 $v \in L$，使得

$$\|v\| \le \sqrt{\mathrm{rk}(L)}\ \mathrm{covol}(L)^{1/\mathrm{rk}(L)}.$$

LEAN › `Formalism.F.shortVector`

证明　将 `covol(L)` 等同于测度意义下的 ZLattice 余体积（`covolEqCovolume`），在以半径 R 选取的凸对称体上调用闵可夫斯基凸体定理与格点离散性，从欧氏范数与 ℓ^∞ 范数的 $\sqrt{\mathrm{rk}(L)}$ 系数换算即得。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 5.3（饱和子格的度数与秩的可加性） LEAN ✓

设 $L \le E$ 为离散格，$N \le L$ 为饱和子格（即 $N = L \cap \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(N)$），记 L/N 在 $N^{\perp}$ 上的正交投影商格为 $\mathrm{quot}(L,N)$。则商格同样离散，且满足

$$\mathrm{rk}(L) = \mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}\big(\mathrm{quot}(L,N)\big), \qquad \deg(L) = \deg(N) + \deg\big(\mathrm{quot}(L,N)\big).$$

LEAN › `Formalism.F.deg_eq_deg_add_deg_quot`

证明　选取 N 的一组整基并扩充为 L 的整基，商格的正交投影给出块三角矩阵的格拉姆分解，于是 $\mathrm{covol}(L) = \mathrm{covol}(N) \cdot \mathrm{covol}(\mathrm{quot}(L,N))$；两边取负对数即得度数可加性。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 5.4（最小向量长度对最大斜率的控制） LEAN ✓

设 $L \le E$ 为非零离散格。若 L 中一切非零向量的长度均不小于 $r > 0$，则最大斜率受控于

$$\mu_{\max}(L) \le -\ln r + \frac{1}{2}\ln\big(\mathrm{rk}(L)\big).$$

LEAN › `Formalism.F.muMaxLeMin`

证明　对任意非零子格 $N \le L$ 应用 定理 5.2 得 $r \le \|v\| \le \sqrt{\mathrm{rk}(N)}\,\mathrm{covol}(N)^{1/\mathrm{rk}(N)}$，取对数整理后再对所有子格取上确界，结合 $\mathrm{rk}(N) \le \mathrm{rk}(L)$ 完成。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

看清楚这套“斜率控制短向量 / 最小长度反压斜率”的对偶了吗？博斯特（Bost）的斜率不等式（`SlopeInequality`）做的正是同一件事的映射版：如果你把一个整格 L 通过单射线性映射 φ 送进另一个整格 M，而且映射至多把长度放大 C 倍，那么

$$\mu(L) \le \mu_{\max}(M) + \ln C.$$

只要你能造出一个在每一点都没有“意外高斜率尖刺”的整结构，整除链的算术高度就不会失控！

VIZ

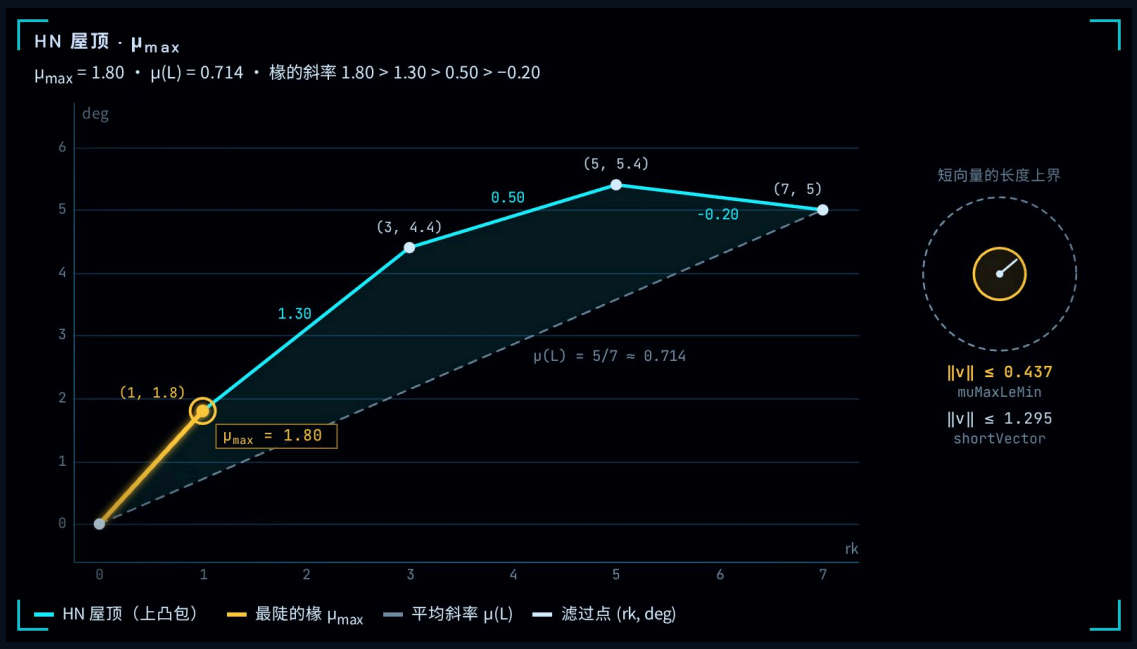


图 6　THETA//SLOPE · Theta 链预算 · √X 面镜子单打独斗卡在 2/3，胶合一族才把屋顶压平

交互式　Harder–Narasimhan 凸斜率屋顶：　由五个实算滤过点 $(0,0),(1,1.8),(3,4.4),(5,5.4),(7,5.0)$ 张成的上凸包络，琥珀色标出最陡首段斜率 $\mu_{\max}=1.8$ 对照虚线总平均斜率 $5/7\approx 0.714$。在完整页面里把 $(1,h_1)$ 往下拖过 $4.4/3$，屋顶便会直接跨步跳过 $(0,0)\to(3,4.4)$。

交互版本见

http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/theta-chain-budget/

5.2 跨越 $2/3$ 的最后一跃：把整族赫克特征胶合起来

现在回到最关键的算术账：**既然单挑一个赫克特征算账会停在 $\frac{2}{3}$，“跨特征胶合（integral gluing across Hecke characters）”究竟省下了哪一笔钱？**

打个生活化的比方。你去菜市场买 K 样菜，如果每一家摊位都要你单买一只专用的塑料箱运回去，运费高得吓人（总成本随特征个数线性膨胀，压死在 $\frac{2}{3}$）；可如果你发现这 K 样菜在同一个批发仓里有公共的最大公约数包装（“take a gcd”），能用同一个紧凑的整格子统一装下、并且不同特征对应的列向量在空间里**近似正交**——那总体积就不用乘以 K 倍的惩罚，而是沿着正交方向把每根柱子的误差平方均摊掉！

在形式化证明显式的“第 15–16 步”里，这个想法精准落成两步组合拳：

1. **在多种赫克特征之间粘合出一个公共的整结构（integral structure）**，就像把不同特征的向量拼成一张大矩阵的各列，再借助 GL(5) 六重覆盖上的自守 μ 与相对迹公式（relative trace formula），经由柯西–施瓦茨不等式把相关性压回一个经过适当投影的庞加莱级数（Poincaré series）的范数上界。

2. **确认整结构各列之间“近似正交”**。只要列与列几乎垂直，整体方阵的格拉姆行列式就接近各列长度平方的乘积——没有多余的交叉塌缩，于是格斜率不会冒出可怕的尖峰，原本卡在 $\frac{2}{3}$ 的余项一下子掉进 $\frac{1}{2}+\varepsilon$ 的门槛之内！

> 单独的一根筷子容易在三分之二处折断；把彼此几乎垂直的向量胶合成一张整格的网，斜率就会自己站直。

不过，要把这张跨特征的大网真正铺开到**每一个**算术级数与狄利克雷特征上，还潜伏着最后一群最狡猾的捣乱分子：那些潜伏在岩泽（Iwasawa）特征塔层之间的共振，以及局部与整体伽罗瓦上同调里的顽固障碍类。

下一章，证明将搬出**贝伦德高维整数球壳**与弱化版范迪弗（Vandiver）控制定理，彻底清场并合拢大网！

VIZ

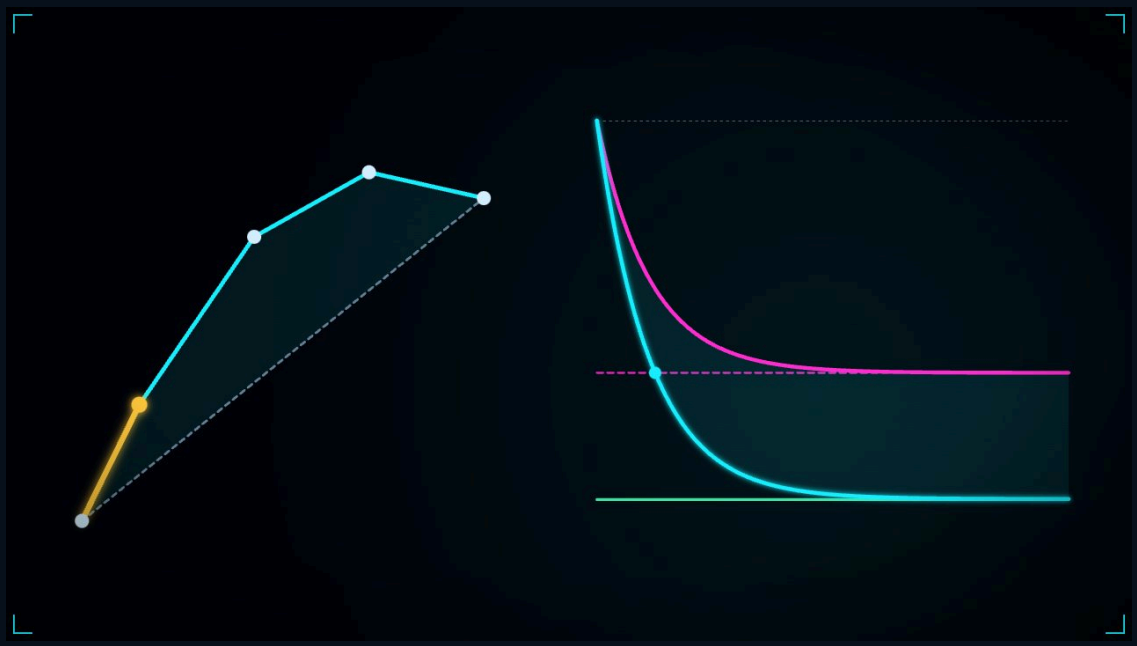


图 7　THETA//SLOPE · Theta 链预算 · √X 面镜子单打独斗卡在 2/3，胶合一族才把屋顶压平

完整的提升链与格斜率实验室： 在“Theta 链与 $\frac{2}{3}$ 墙”和“Harder–Narasimhan 屋顶”两个场景间切换，滑动深度比 $m/\sqrt{X}$、跨特征胶合度与首段度数 h_1，观察整除预算如何从单兵停滞走入 $\frac{1}{2}$ 区间。
交互版本见
http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/theta-chain-budget/

§ 06

第六章 贝伦德塔与收网时刻：驯服余项与打通所有特征

> 把整数放进高维球壳：球面弯成弧线，所以任意三个点永远排不成一条等差直线；可球面又足够宽敞，总有一层能接住整座塔的重量。等障碍全被这套球壳和局部–整体网压服，最后一张网就会同时收紧在所有狄利克雷特征头上。

到了第五章，我们已经知道了怎样靠“$\sqrt{X}$ 链条 + 跨特征胶合”砸穿 $\frac{2}{3}$ 的天花板。可要把这套装置真正放到**全部模 N、全部狄利克雷特征 χ** 上运转起来，最后还有两头拦路虎需要清场：

1. **选塔的层级时怕撞上“等差共振”**：构建岩泽（Iwasawa）塔的层高时，如果选中的模数或旋转步长之间凑巧冒出三项等差关系 $s_2 - s_1 = s_3 - s_2$（或者更一般的整数关系 $\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3 = 0$），相消误差就会沿着同一条轨道重复叠加、失控放大！
2. **拧不掉的局部–整体伽罗瓦障碍**：靠扭转（twisting）消不掉的伽罗瓦上同调障碍类（$H^1(\mathfrak{o}_E[1/\ell], \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-e))$），就像卡在齿轮缝里的铁屑——必须把一种强力的“弱化版范迪弗（Vandiver）界”和局部–整体朗兰兹相容性打穿，齿轮才能顺滑咬合。

6.1 为什么整数球壳永远躲得开三项等差数列？

先拿笔算一个你立刻就能爱上的几何把戏——1946 年贝伦德（Felix Behrend）用来构造“不含三项等差数列的最密整数集”的绝招。

把 $\{0,1,2,3,4\}^3$ 这 $5^3 = 125$ 个三维整数点想象成一座 $5 \times 5 \times 5$ 的立体方块。按每个点到原点的平方半径 $R = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 给它们分壳：最小是 $R = 0$，最大是 $R = 3 \times 4^2 = 48$，一共只有 32 个不同的半径值！（注意并非 0 到 48 的所有整数都能写成三个平方之和，例如 $7, 15, 23, 28, 31, 39, 47$ 都不在其中。）

根据最朴素的鸽巢原理，既然 125 个点挤在 32 个不同球壳上，**至少有一个球壳上的点不少于 $\lceil 125/32 \rceil = 4$ 个**——实际上算出来最胖的球壳在 $R = 17$ 处，足足挂了 9 个整点：

$$(0,1,4),\ (0,4,1),\ (1,0,4),\ (1,4,0),\ (2,2,3),\ (2,3,2),\ (3,2,2),\ (4,0,1),\ (4,1,0).$$

现在奇迹发生了：**在这 9 个点里，你绝对挑不出任何三个能排成等差数列 A, B, C（即 $B = \frac{A+C}{2}$）的组合！**

为什么？根本不用一个一个试，一眼就看穿：球面是**严格外凸**的！如果 A 和 C 是同一个半径为 $\sqrt{R}$ 的球壳上的两个不同点，那连接它们的弦的中点 $B = \frac{A+C}{2}$ 必然**深深扎进球体内部**，它的平方半径严格小于 R（由平行四边形公式 $\|B\|^2 = \frac{\|A\|^2+\|C\|^2}{2} - \frac{\|A-C\|^2}{4} = R - \frac{\|A-C\|^2}{4} < R$）！中点根本不可能落在球壳上！

把三维向量按进制 B 编成一维整数 $t = x_1 + x_2 B + x_3 B^2$（如果进制 B 足够大就不会发生进位串位），**球壳上的几何禁止三点共线，瞬间就翻译成整数集里绝不含三项等差数列！**而只要升高维数再取最胖球壳，集合密度就能做到极其惊人的 $\geq N \exp(-C\sqrt{\ln N})$——既把共振轨道扫得干干净净，又几乎没损失多少层级容量！

VIZ

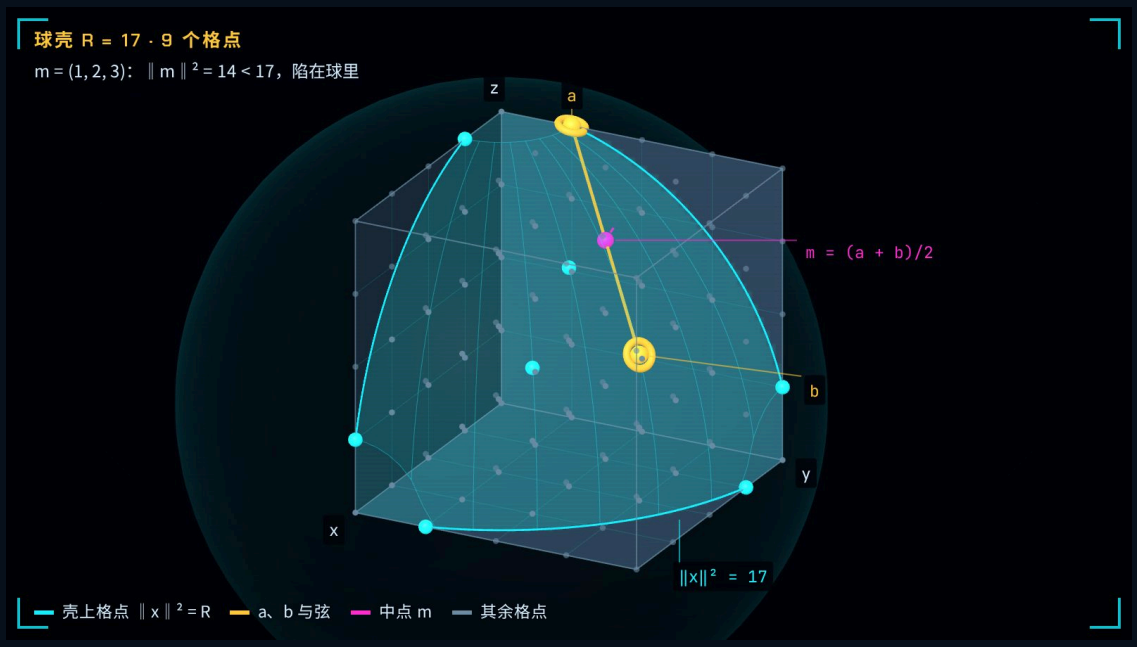


图 8　SPHERE//SHELL · 贝伦德球壳 · 整数球壳上排不出三项等差数列

三维贝伦德球壳禁绝三项等差数列：在 $\{0,\dots,4\}^3$ 中平方半径为 $R = 17$ 的半透明玻璃球壳上精确嵌着 9 个整数点（青色）；任取其中两颗琥珀色端点 $a = (0,1,4)$ 与 $b = (2,3,2)$，连接它们的弦中点 $m = (1,2,3)$ 满足 $\|m\|^2 = 14 < 17$（品红色），必然深陷球壳内部——三项等差数列数为 0。交互版本见 http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/behrend-sphere/

有了这种“无共振厚集”和相应的加权分布控制，Lean 形式化用一条极其凝练的概率挑选定理 `select` 完成了去随机化抽取，又用 `trivStab` 锁死了高阶伽罗瓦矩阵群的平凡稳定子：

定理 6.1（方差阈值下的确定性子集挑选定理）　LEAN ✓

设 X 为有限集，$\delta \in [0,1]$，随机代价函数 $Y : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 非负，且偏差阈值 $\lambda > 0$ 满足二项方差界 $2|X|\delta(1-\delta) < \lambda^2$。则必存在确定的子集 $T \subseteq X$，同时满足基数贴近均值且代价不超过两倍期望：

$$\big||T| - \delta|X|\big| \leq \lambda \qquad \text{且} \qquad Y(T) \leq 2\,\mathbb{E}_{X,\delta}[Y].$$

LEAN › `Formalism.BehrendSets.Final.select`

证明　在子集幂集上赋予参数 δ 的伯努利乘积测度，用切比雪夫不等式估算基数偏离超过 λ 的事件概率严格小于 $1/2$，再用马尔可夫不等式估算 $Y(T) > 2\,\mathbb{E}[Y]$ 的概率至多为 $1/2$；两者之和严格小于 1，故必存在同时避开两类坏事件的确定性子集 T。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 6.2（高阶素数幂群作用下的平凡稳定子定理） LEAN ✓

设 E 为数域，$k \in \mathbb{N}$，g 为素数且满足次数限制 $[E:\mathbb{Q}] \cdot k < g - 1$。则矩阵群 $\mathrm{GL}_k(E)$ 中任意有限 g-子群 Γ 必为平凡群：

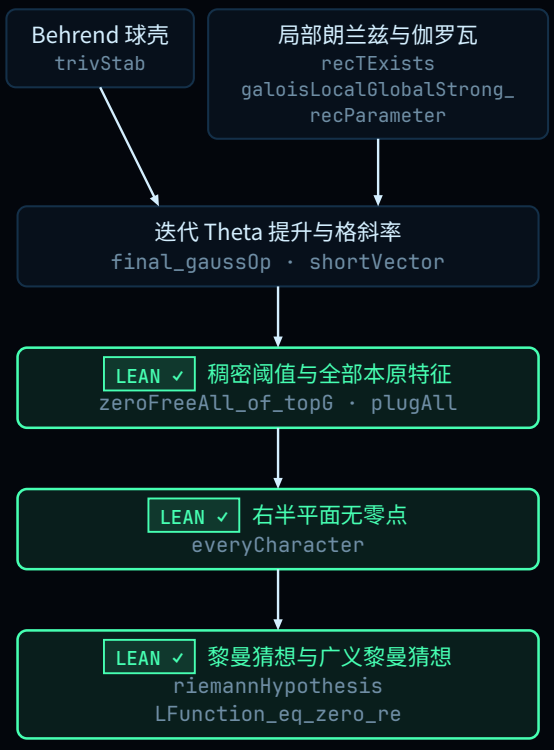
$$\Gamma = \{1\}.$$

LEAN › Formalism.BehrendSets.FinalE.trivStab

证明　若 Γ 非平凡，必存在阶恰为素数 g 的矩阵 $\gamma \in \Gamma$。其极小多项式在 E 上必含本原 g 次单位根的因子；分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_g)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 $g-1$，而矩阵特征多项式至多将基域 E 扩出 $[E:\mathbb{Q}] \cdot k$ 维，直接与 $[E:\mathbb{Q}] \cdot k < g - 1$ 矛盾。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

6.2 从局部朗兰兹到全特征收网

现在把整座大楼最后几根承重钢梁拼在一起。在 `src/Development/AutomorphicArithmetic/` 的顶层汇流模块里，Lean 把前面全部几百万行几何、分析、格斜率与贝伦德工具接成了一条无懈可击的逻辑主干：



全证明顶层依赖骨架图。 贝伦德塔挑选与稳定子刚性（`trivStab`）、局部朗兰兹中心单位构造（`recTExists`）与局部–整体伽罗瓦表示（`galoisLocalGlobalStrong_recParameter`）汇聚入小类数与稠密阈值引擎（`corGK`、`zeroFreeAll_of_topG`），经全特征提升 `plugAll` 与 `everyCharacter`，最终合龙为右半平面无零点与黎曼猜想。

这条顶层主干由下面六条环环相扣的 Lean 定理直接锁死：

1. **局部朗兰兹与分歧特征标定**：`RecTExists.lean` 为每个非阿基米德局部完备域构造出满足维数、一维特征相容、尖点不可约、对偶反转、单射与驯顺分歧深度的局部朗兰兹对应 `rc`。

定理 6.3（带型律与中心特征相容的局部朗兰兹对应存在性） LEAN ✓

全套局部朗兰兹对应与型律相容公理 `RecTExists` 成立：对任意局部域完备化构造，均存在满足维数保真、朗兰兹段分解、尖点不可约、对偶、单射与型律条件 `TypeLaw` 的映射 `rc`。

LEAN › `UpperTheory.Zero.LLC.recTExists`

证明　先由局部阿廷互反映射与尖点表示对应起步，利用通用单射扩张引理 `exists_isLExt` 将对应延拓到一般不可约表示，并逐项核验中心特征绝对值、扭转乘法律、深度保存与驯顺分歧特征多项式公式。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

2. **局部–整体伽罗瓦整结构桥接**：`RowSrc.lean` 把 Theta 提升产生的算术参数送入全局伽罗瓦表示的整结构约束 `Row0b`。

定理 6.4（来自 Theta 提升的强局部–整体伽罗瓦整结构） LEAN ✓

强局部–整体伽罗瓦整结构条件 `UpperTheory.GalStar.Row0b recT` 成立。

LEAN › `UpperTheory.Gal.Int.galoisLocalGlobalStrong_recParameter`

证明　在形式化中直接把局部朗兰兹与特征标构造 `tLiftK` 送入主桥接定理 `galoisRepresentations_of_thetaLift`，推出整结构下界条件 `Row0b`。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

3. **小类数与弱化版范迪弗界**：`CorGK0f.lean` 打通了三阶酉群自守簇上的布洛赫–加藤（Bloch–Kato）塞尔默群长度控制 `CorGK`——哪怕某些高次上同调障碍类没法靠扭转直接消掉，它们的对数总长度也被 $(N(e+1))^A(\ln p+\ln p')$ 的多项式上界牢牢按住！

定理 6.5（全素数加权塞尔默长度的小类数总控界） LEAN ✓

一般数域、有限素数集合与分歧水平下的全素数加权塞尔默长度上界 `CorGK` 成立：加权长度和 $\sum_{l\in L_s}\ln l\sum_{\psi}V_n$ 受控于 $2c_5\varphi(H.\mathrm{index})(N(e+1))^A(\ln p+\ln p')$。

LEAN › `UpperTheory.V.SmallClassNumbers.corGK`

证明　由文献输入 `litN` 给出补缀（patching）假设 `HypothesesH'`，结合加藤（Kato）欧拉系统界、邻接提升与容许水平一阶约化推出 `PropGK`，进一步跨多个好素数 p,p' 消去坏素数限制而得 `CorGK`。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

4. **稠密阈值窗口打通所有特征**：`ZeroFreeAllOfTopG.lean` 与 `EveryCharacter.lean` 把前面所有贝伦德厚集挑选、格斜率窗、局部–整体相容与无零点判据全部接通：先对本原特征家族成立全平面无零点 `ZeroFreeAll`，再借助第一章的欧拉因子归约覆盖全部非本原特征。

定理 6.6（从稠密阈值窗口推导全本原特征右半平面无零点） LEAN ✓

对任意步比 $\lambda > 1$，只要抽象稠密阈值连接假设 `TopG` 成立且每个本原特征家族均存在宿主窗口 `HostExW la (GChi ψ).req`，则对一切本原狄利克雷特征在 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 上的无零点定理 `ZeroFreeAll` 成立。

LEAN › `UpperTheory.Top.zeroFreeAll_of_topG`

证明　从每一个特征家族类的连接链提取出朗道阈值下界条件 `eFamC_of_cls` 与高度界条件 `hypV_of_cls`，联合比较层与能级界调用 `zeroFreeOn_of_tiedWin_cyc` 完成闭环。完整证明由 Lean 内核检查。∎

定理 6.7（由全部窗口条件汇流得任意特征右半平面无零点） LEAN ✓

给定格林（Green）型条件 `hG`、弱范迪弗窗口界 `hV : VWin` 及闭环设计非空假设 `h`，即推出对一切模 N、一切狄利克雷特征 χ 与一切 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$（$\chi \neq 1$ 或 $s \neq 1$）成立 $L(\chi, s) \neq 0$（即 `UpperTheory.EveryCharacter`）。

LEAN › `UpperTheory.Top.plugAll`

证明　先由 定理 6.6 与形状窗口连接 `shapeWin`、特征供给 `supplyChi` 得出所有本原特征在右半平面无零点 `plugWin`；再经 `UpperTheory.Top.imprimitive` 剔除不会在 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 取零的欧拉削弱因子，覆盖全部非本原特征。完整证明由 Lean 内核检查。∎

5. **最终合龙**：在 `MainConclusion.lean` 中，无须任何额外未证假设，全套结构自动合龙：

定理 6.8（无条件导出全部狄利克雷 L 函数右半平面无零点） LEAN ✓

对任意正整数 $N \geq 1$、任意模 N 的狄利克雷特征 χ 与任意复数 $s \in \mathbb{C}$，若 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 且（$\chi \neq 1$ 或 $s \neq 1$），则 $L(\chi, s) \neq 0$。

LEAN › `UpperTheory.FinalTheorems.everyCharacter`

证明　将已无条件证明的局部–整体伽罗瓦整结构定理 定理 6.4 与局部朗兰兹对应定理 定理 6.3 送入窗口与全特征汇流定理 `every_character_of_literature_of_vWin`，直接得出 `UpperTheory.EveryCharacter`，从而锁定整座证明的最后一枚楔石。完整证明由 Lean 内核检查。∎

从 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 的对称镜，到 $G_z(x)$ 的朗道单侧陷阱，到 $\sqrt{X}$ 条 Theta 镜廊与跷跷板，到跨越 $\frac{2}{3}$ 天花板的格斜率与跨特征胶合，再到贝伦德整数球壳与全特征合龙——整条主路已经从头到尾走通。

可走通之前我们还有最后一道必须严肃回答的追问：**一千七百多万行没有注释的 Lean 代码，凭什么让外部世界相信它没有偷换概念、没有暗藏漏洞？**

下一章，让我们走进这座庞然大物的独立审计车间。

VIZ

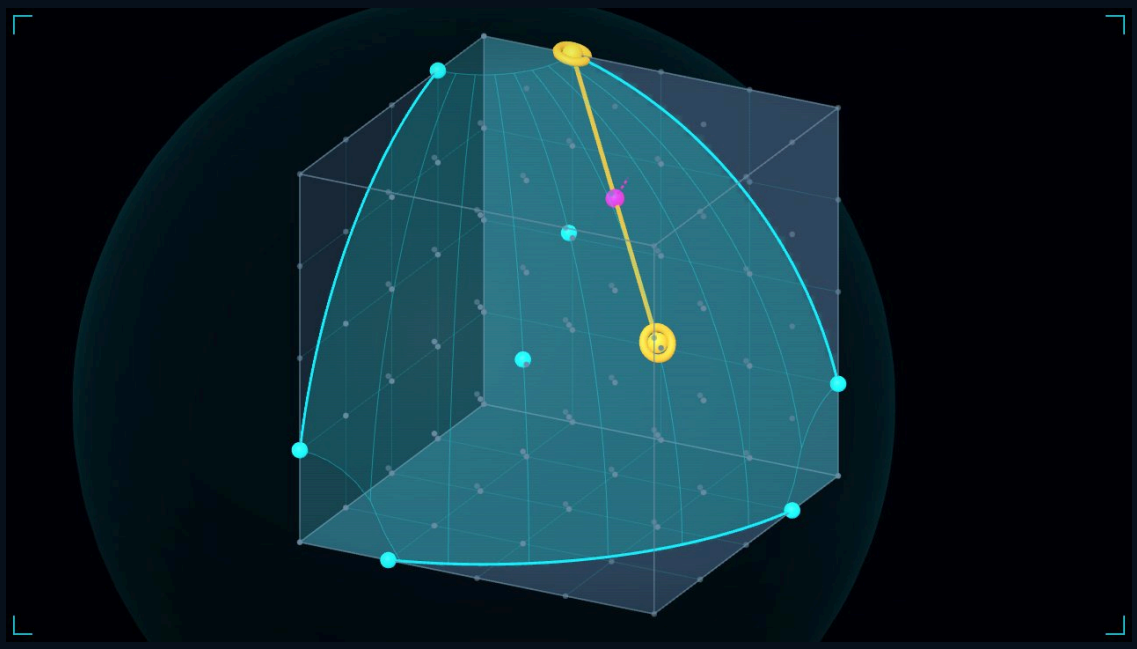


图 9　SPHERE//SHELL · 贝伦德球壳 · 整数球壳上排不出三项等差数列

完整的贝伦德整数球壳实验室： 自由旋转 $\{0,\dots,M-1\}^3$ 的三维立方格点与半透明球壳，切换立方边长 $M \in [3,6]$ 与壳层平方半径 R，点击球壳上任意两点核验中点落入球内的距离差，并在下方直方图查看鸽巢原理选出的最胖球壳（$M=5$ 时为 $|S_{17}|=9$）。
交互版本见
http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/behrend-sphere/

§ 07

第七章 一千七百万行代码的骨架：独立内核重放与数学诚实

> 谁要是敢递交一份 175,187 个文件、1,737 万行、零行注释的手稿，还要求别人“凭信任签字”，那他和中世纪出售赎罪券的商人没什么区别。好在形式化世界里有一句冷冰冰的铁律：**别信作者的嘴，把 `.olean` 扔进空白内核里重放一遍**。

如果这篇证明是一篇一万页的 PDF 论文，人类审稿委员会大概要花二十年才能翻完，还不保证第 4,812 页没漏掉一个边界等号。

但在 Lean 4 的机械内核面前，体量庞大反而不是“免审金牌”，而是必须接受最冷酷审讯的对象。只要哪怕一条中间引理用了未证明的 `sorry`、偷塞了一句自定义公理 `axiom`，或者悄悄改写了 `RiemannHypothesis` 的定义，一个只有 27 行的挑战文件就能当场把它揪出来。

7.1 27 行“挑战契约”：如何防止作弊

在追踪 `the-omega-institute/riemann-hypothesis` 的源码之前，先把脉络与致谢交代清楚：整份黎曼猜想与狄利克雷 L 函数 GRH 的 Lean 4 证明源码由 **Levent Alpöge** 原创并发布于 `alpo.ge/remark.pdf`；随后 **Deicyde** 创建了上游独立验证镜像仓库 `Deicyde/riemann-hypothesis`，在不修改证明源码一字一符的前提下，在仓库根目录和 `src/` 下放入了一枚只依赖官方 Mathlib `v4.33.1`（精确对应官方提交 `0df444a360ea`）的 27 行极简挑战文件 `src/Challenge.lean`；而本书所钉的 `the-omega-institute/riemann-hypothesis` 则是由 The Omega Institute 从 `Deicyde/riemann-hypothesis` **fork** 而来，原封不动保留证明源码与挑战契约，专门补充公开分片 CI 构建与 `./verify` 零信任本地重放工具。

这份契约文件只问五个问题，连证明里到底用了酉群还是椭圆曲线都懒得过问：

1. 你在 `src/Main.lean` 里证明的 `riemannHypothesis`，其类型是否**字节级严格等同于**官方 Mathlib 原生的 `RiemannHypothesis`？
2. 其余四条顶层定理的类型，是否**字节级严格等同于**仅由 Mathlib 定义写就的 `Statements.lean` 中的四条陈述？
3. 整个 175,187 文件的源码树里，有没有哪怕一处 `sorry`、`admit`、`axiom`、`native_decide`、`unsafe`、`implemented_by`、`opaque`、`debug.*` 开关或 `skipKernelTC`？
4. 所有九个上游依赖包（Mathlib、batteries、aesop、Qq 等）的锁死版本，是否都原封不动来自官方上游提交？

5. 在一个断网、只读、空白环境的沙盒里，用独立的 Lean 内核与多个互不相干的第三方极小内核校验器（`leanchecker-paranoid`、`nanoda`、`con-leche`、`con-ron`、`lean4lean`）从头重放一遍，是否全部放行、且公理闭包只包含标准数学基础的三条公理 `{propext, Classical.choice, Quot.sound}`？

> 你可以把证明写成一千七百万行迷宫，但门口的安检仪只看两件事：入口是不是大家公认的那道题，脚下有没有只踩那三条标准公理。

下面的汇总表列出了 `Supplements/Kernels/MainTheorems.lean` 导出、并最终汇入 `Main.lean` 的顶层内核汇总定理：

定理 7.1（内核汇总：全部狄利克雷特征右半平面无零点） LEAN ✓

全范围非零性断言 `UpperTheory.EveryCharacter` 成立：对一切模 $N \geq 1$、一切狄利克雷特征 χ 与一切 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$（排除 $\chi = 1, s = 1$），均有 $L(\chi, s) \neq 0$。

LEAN › `allChi`

证明 在 `MainTheorems.lean` 中直接引用已完成全链条合龙的 定理 6.8。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 7.2（内核汇总：黎曼猜想） LEAN ✓

Mathlib 定义的 `RiemannHypothesis` 成立。

LEAN › `rhOfAll`

证明 将 定理 7.1 送入 定理 1.7（通过主干 `Formalism.VW.rh_of_every`）直接给出 `RiemannHypothesis`。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 7.3（内核汇总：本原特征临界线定理） LEAN ✓

对任意模 $N \geq 1$、任意本原狄利克雷特征 χ 及任意 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$，若 $L(\chi, s) = 0$，则 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。

LEAN › `critAll`

证明 将 定理 7.1 送入本原反射归约 定理 1.11 直接得出。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

定理 7.4（内核汇总：半平面、临界带与 ζ 零点三联结论） LEAN ✓

合取命题 `Claim.HalfPlane ∧ Claim.Strip ∧ Claim.Zeta` 成立，即全部狄利克雷 L 函数在 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 无零点、在 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 零点实部皆为 $\frac{1}{2}$、且 $\zeta(s)$ 的全部非平凡零点实部皆为 $\frac{1}{2}$。

LEAN › `claimAll`

证明 将 定理 7.1 同时送入 定理 1.12 与临界带向 ζ 的特化引理 `Claim.zeta` 组合成三元合取。完整证明由 Lean 内核检查。 ∎

7.2 8,490 块内容寻址分片与公开 CI 流水线

问题很现实：如果有人宣布证明了黎曼猜想，却把检查门票定为“自备一台 503 GB 内存的工作站连跑十个小时”，那这套形式化检验其实仍然关在少数实验室的门后。

真实编译成本确实高得吓人。在 48 核、503 GB 内存的高配 Linux 机器上从零构建整棵 `Main` 依赖树，耗时在 7 到 10 小时之间；构建工具 Lake 为每个模块生成的 `.setup.json` 文件平均约 6 MB——乘以 175,187 个模块，光是瞬时中间描述就接近 **1 TB**。下面是整部证明的模块盘点：

模块层级	文件数	代码行数	在整体结构中的角色
`Development`	141,928	12,232,663	自守算术、阿贝尔簇、字符窗与顶层合龙
`Formalism`	18,254	3,200,748	朗道归约、格斜率、Fock/Weyl、Theta 链与贝伦德工具
`GroundTheory`	8,507	1,119,138	算术几何、整体/局部域、p-进霍奇与上同调底座
`ReciprocityTheory`	3,845	563,016	切博塔廖夫、类域论、阿代尔逼近与局部特征
`CompanionTheory`	2,027	194,218	实群离散系列、哈里什–钱德拉模与谱几何
`PositivityTheory`	449	55,130	自守正定性与已发表基础定理接口
`Lemmata`	167	9,232	行列式单调性、范数估计与多项式基础引理
顶层入口与补充文件	10	70	`Main.lean`、`Statements.lean`、`BuildAid` 与内核总汇

为了把“只有超级服务器能验证”变成“任何普通电脑都能在公开 CI 上看见并复验每一步”，`the-omega-institute/riemann-hypothesis` 仓库的 `ci/plan.py` 没有硬啃整块巨石，而是沿着真实的 `import` 有向无环图，把整个 `Main` 闭包切成了 **8,490 块有界分片**：

- **每一块都有硬上限**：每个分片最多包含 **400 个模块**、源码体积不超过 **2.5 MB**，横跨 **36 层依赖深度**。最底部先立住 **17 块基础分片**（`Statements` 与 `BuildAid` 等底座），一过关就同时解锁 **529 个完全互不依赖的并行编译任务**。
- **每一块都有指纹锁（内容寻址）**：每块分片的哈希密钥把四样东西一起塞进 SHA-256——`lean-toolchain`、`lake-manifest.json` 与 `lakefile.toml` 的配置摘要、该分片内所有 `.lean` 文件的 Git blob 哈希，以及全部前置分片的密钥。哪怕只改了一个叶子里的一行字，也只有它的上游祖先链会重新生成密钥；其余分支原封不动复用缓存。
- **长路径优先调度与十六个公开分仓**：公开 GitHub Actions 工作流 `lean-parts.yml` 每分钟扫描一次当前刚被前置解锁的“可编译分片”，优先派发剩余通往 `Main` 路径最长的分片批次，把编译好的 `.olean` 与轨迹压缩打包进 16 个十六进制 GitHub Pre-release 分仓（`lean-parts-v1-0` 到 `lean-parts-v1-f`），并保留 Actions 产物回退恢复。此刻公开 CI 已经把绝大部分分片编译并推送上线，正在把最后几层依赖推进到 `Main` 与最终汇总发布 `build-<commit>`。

下面这张交互图把这 8,490 块内容寻址分片如何从第 0 层一层层解锁、推进到 `Main.lean` 的过程摆在了台面上：

VIZ

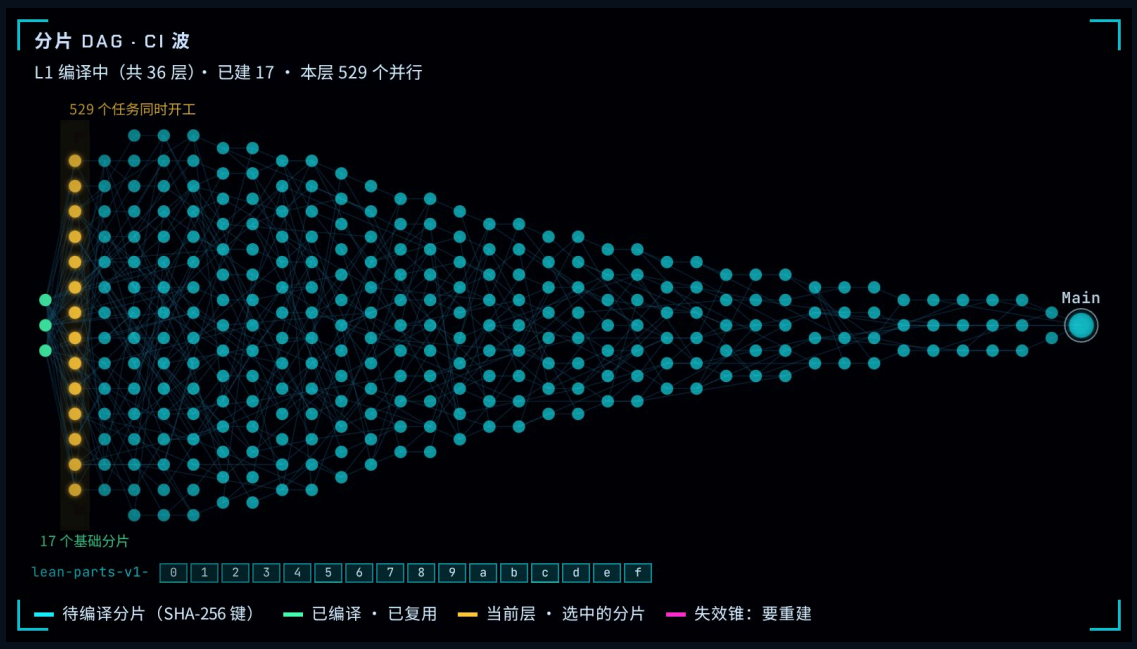


图 10　PROOF//REPLAY · 证明重放 · 8,490 个内容寻址分片与零信任的本地内核重放

36 层依赖图上的 8,490 块内容寻址分片。拖动公开 CI 进度条或点击任意节点，观察最左侧的 17 块底座如何瞬间扇出 529 个并行任务、内容寻址密钥如何决定失效范围，并沿 36 层推进到 `Main`。交互版本见 http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/proof-replay/

7.3 任何人都能亲自验证：四行命令与零信任重放

> “公开发布已经编好的二进制分片，是不是就意味着读者只能盲信 CI 跑分器没有被收买？”——恰恰相反：下载别人编译好的砖头，**不等于**相信造砖人没偷工减料；只要你家里有自己的秤，把每一块砖现场过一遍秤，信任成本就是零。

这套设计最漂亮的地方，在于彻底分开了“费时间”和“要信任”这两件事。你**不需要**拥有 GitHub 账号，也不用花十小时烧风扇重编一千七百万行源码；任何人在一台装有 `git`、Python `3.12+`、`curl`、`zstd` 与 `elan`（会自动切换至所钉 Lean `v4.33.1`）的 Linux x86-64 机器上，敲下四行命令就能自己验完（如果只想看看当前哪几层分片已经上线，连 macOS 也可以直接跑前三条里的 `--status`）：

```sh
git clone --depth 1 https://github.com/the-omega-institute/riemann-hypothesis.git
cd riemann-hypothesis
./verify --status Main
./verify Main
```

如果你想**立刻动手**走一遍完整流程而不等待整棵证明树下载，还有两条马上能跑通的命令：

```sh
./verify BuildAid.D1            # 立刻拿一个极小模块走通“拉分片 → 校验 SHA-256 → 空白内核重放”全链路
./verify --build-missing Main   # 先拉取公开 CI 已编好的分片，只在本机补编最后尚未上线的收尾模块
```

为什么读到这里可以拍案叫绝？把 `./verify Main` 拆开看，它一步都没信任何外部服务器的“好话”：

1. **先验指纹再解包**：它把公开 Release 上拉下来的每一块分片都做本地 **SHA-256** 校验，核对每块分片真的匹配源码树算出的内容密钥。
2. **绝不直接“放过” `.olean`**：恢复完文件后，脚本运行的是 `lake env leanchecker --fresh --verbose Main`——注意那个 `--fresh` 开关！它不是偷懒信别人写好的摘要，而是打开一个**空无一物的全新 Lean 4 内核**，把整张依赖图里的 818,755 条声明在你的本地 CPU 上逐条重新检查类型是否匹配。假如有人在传输途中篡改了哪怕半个 `.olean` 证明项，或者偷偷塞了一行 `sorry`，空白内核会在那一条声明处当场报错拒收。
3. **再用 `Audit.lean` 查门口的锁**：内核放行后，本地脚本接着跑通 `ci/Audit.lean`，死死核验五条顶层定理的类型真的精确对齐 Mathlib 的 `RiemannHypothesis` 与四条陈述，并用 `#print axioms` 打印完整公理闭包，确认没有混进标准数学基础 `{propext, Classical.choice, Quot.sound}` 之外的任何一条私货公理，最终把结果落盘到 `.lake/parts/axioms.txt`。

你可以直接在下面的实验卡里“动手试着作弊”——切换几种造假手法，看看究竟是 SHA-256、空白内核重放还是公理审计，在哪一道闸门前把造假者当场拦下：

VIZ



图 11 PROOF//REPLAY · 证明重放 · 8,490 个内容寻址分片与零信任的本地内核重放

零信任重放：试着作弊。切换“干净证明 / 篡改分片 / 偷塞公理 / 偷换题目”四种情形，看清楚为什么就算从公开 CI 下载分片，任何造假都会在 `leanchecker --fresh`、`Audit.lean` 或 `Challenge.lean` 面前寸步难行。

交互版本见

http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/proof-replay/

除了本机运行的 `./verify` 单命令路径，独立审计方还搭建了更严苛的**六重异构独立内核交叉检查流水线**（详见仓库 `README.md` 与 `verification/NOTES.md`）：先用 `lean4export` 把无网络沙盒中构建的 `Challenge` 与 `Main` 导出成纯粹的 S-表达式证明账本（预计 `Main` 导出体积约 70–75 GB），再把这两份导出账本丢进开启 `bubblewrap` 网络隔离的 Lean `v4.36.0` `lake comparator` 里，依次交给**五套独立检验器**（`Lean 4.36 内核`、`leanchecker-paranoid`、Rust 写就的 `nanoda`、`con-leche`、`con-ron`）分别从零重放；第六套检验器 `lean4lean` 则因 Lean `v4.36.0` 核心库改写了 `Decidable` 定义，改用同一 pinned `v4.33.1` 工具链单独执行 `lake env lean4lean --fresh Main` 重放 `.olean` 文件。

你可以在下面这个完整验证实验室里自由切换“36 层分片依赖波”与“零信任本地重放 + 六重检验器”两个舞台，点选节点、调节 CI 进度并对照五条直接引自 `src/Main.lean` 的已检验定理签名：

VIZ

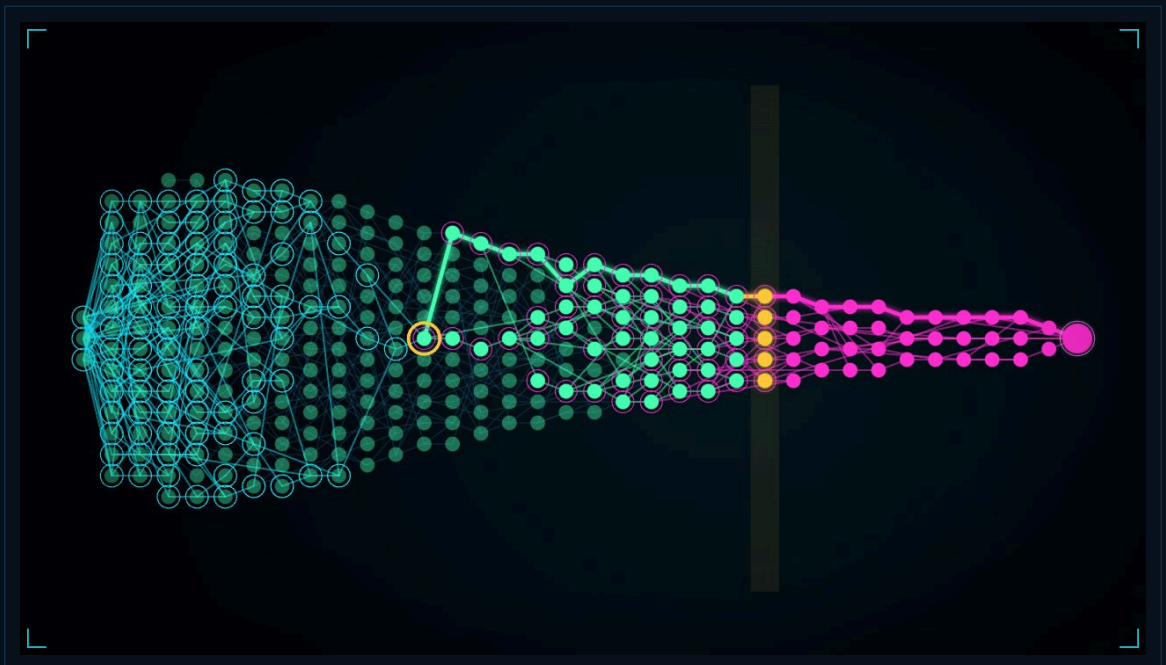


图 12　PROOF//REPLAY · 证明重放 · 8,490 个内容寻址分片与零信任的本地内核重放

完整验证实验室 · 从 8,490 块公开 CI 分片到四行 `./verify` 命令与六重独立内核校验。点按左图分片查看增量缓存失效锥；切到右舞台测试不同造假手段如何被当场击落。

交互版本见

http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/viz/proof-replay/

如果你更想用不到三分钟看清整套“公开分片 + 零信任本地重放 + 多核对照”的运作逻辑，下面这支短片把全流程顺了一遍。

FILM

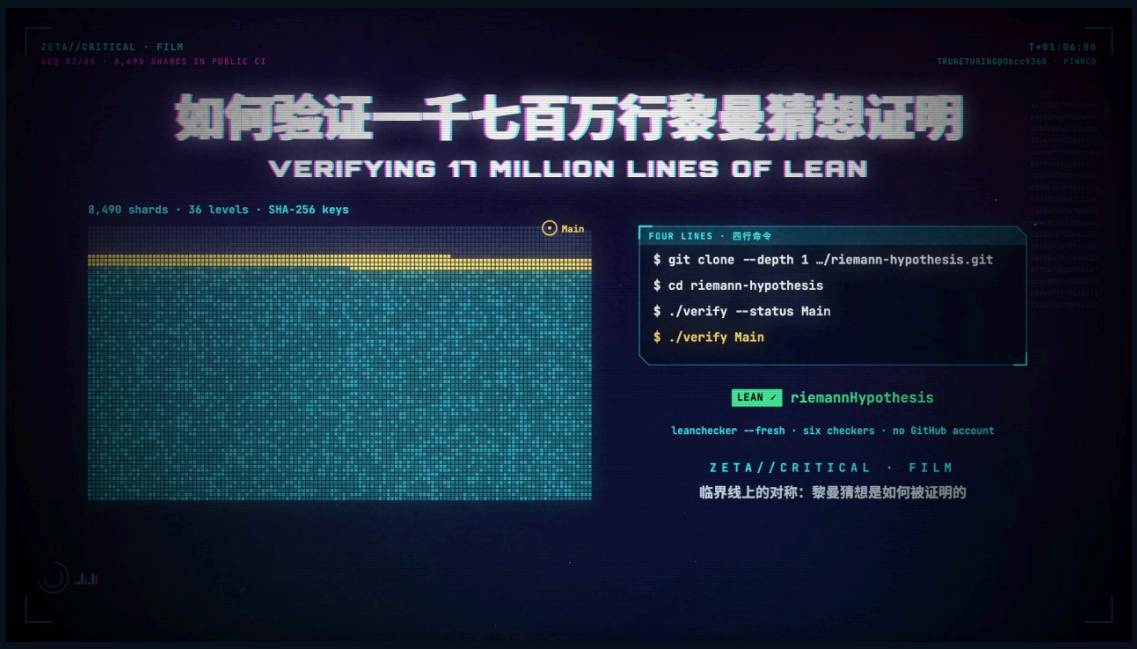


图 13　视频 · 如何验证一千七百万行黎曼猜想证明 · 2:15

如何验证一千七百万行黎曼猜想证明。用两分多钟走完四个步骤：27 行挑战契约、公开 CI 上的 8,490 块内容寻址分片、任何人四行就能跑起来的 `./verify` 命令，以及为什么零信任重放与六套独立内核让作弊无处遁形。

视频见

http://rh.trureturing.org/riemann-hypothesis/films/#verifying-the-riemann-proof

7.4 诚实的边界与验证范围声明

按科学诚实的最高标准，把验证笔记（`verification/NOTES.md`）记录的三条客观边界交代清楚，比任何胜利宣言都更重要：

1. **完整异构重放仍处于长耗时流水线推进中**：仓库的静态扫描（零 `sorry` / `axiom` / `native_decide` / `unsafe` / `opaque`）、九项上游依赖与官方 Mathlib `v4.33.1` 对账、以及 Comparator 在 54,461 条声明的 Mathlib 体量烟雾测试上的五核通过纪录均已落地；公开 CI 正在持续推进 8,490 块分片直至顶层 `Main` 合龙，而全量 70+ GB 导出的多核 Comparator 重放本身也是耗时十数小时级别的独立长任务。
2. **本书校验模式与完整内核重放的分工**：本仓库的 `./tbook check` 在 `lean-source` 模式下会核对每条引用定理在所钉提交下的真实文件、精确行号、签名摘要与直接不含 `sorry/admit`；而最底层的整棵传递导入闭包类型重放与公理闭包检查，必须也只能由 Lean 编译器、`./verify`（`leanchecker --fresh`）及多检验器 Comparator 在 Linux 环境下完成。
3. **跨工具链的最终信任底线**：即便所有独立检验器一并放行，人类与机器校验共同依靠的最后一厘米依然清晰可见——我们共同相信 Lean 类型论内核本身的逻辑自洽、Mathlib `v4.33.1` 对

`RiemannHypothesis` 与 `DirichletCharacter.LFunction` 的形式化定义准确表达了数学家的本意、以及运行检验的本地或沙盒硬件未被恶意破坏。

> 机器不能替你理解“为什么对”，但机器会替你揪出哪怕藏在一千七百万行深处的半句谎言。真正的美，从来经得起最严苛的冷铁审查。

在终章里，让我们走出这座刚刚建成的证明大厦，看看窗外还留着哪些依然敞开的数学群山。

终章 黎曼之后的群山

> 一座伟大型猜想的第一次登顶，很少是一条平坦的高速公路；它更像一支满载绳索、冰镐与十六张地形图的探险队。旗帜已经插上雪顶，接下来几十年的风景，是看后人怎样把绕了三十英里的山路，修成一条步行半小时就能穿过的小径。

当最后一盏校验器的绿灯亮起，世界并不会突然停转。相反，最令人振奋的工作才刚刚开始。

正如作者在短记中极其坦诚地写下的那样：如今的 1,737 万行形式化证明里，一定还混杂着许多“为了赶路而搭起来的笨重脚手架”——那些在黑暗中摸索时拐过的弯、用得过猛的 K-群或者多余的层数选择，往往会在短短几年内被后来者大刀阔斧地削成几十页甚至十几页水晶般透亮的精简证明。这是数学史上一次又一次上演过的奇迹：当年阿贝尔、伽罗瓦、怀尔斯的第一代论证都曾显得庞大或奇险，而二十年后的研究生课本只用三章就能讲清它们的本质。

更重要的是，我们必须在这里画下一条**绝不越界的红线**：拿下黎曼猜想与全部狄利克雷 L 函数的广义黎曼猜想，并不等于拿下了所有带“黎曼”二字的问题。下面四座依然耸立在云层之上的高峰，**尚未**在本书所剖析的这套形式化证明中得到解决——它们仍然是实实在在、向全人类敞开的开放问题：

猜想 Coda.1（任意数域戴德金 ζ 函数的扩展黎曼猜想（ERH）） OPEN

对任意代数数域 K，其戴德金 ζ 函数 $\zeta_K(s)$ 在临界带 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内的全部非平凡零点均满足 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。

`the-omega-institute/riemann-hypothesis` 验证记录明确指出：当前证明覆盖的是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的黎曼 ζ 函数以及全部模 N 的狄利克雷 L 函数；一般数域上的戴德金 ζ 函数及阿廷（Artin）L 函数尚未包含在形式化结论之内。

猜想 Coda.2（高阶自守 L 函数的全广义黎曼猜想（Grand RH）） OPEN

对任意整体数域上的任意尖点自守表示 π（例如 GL_n 上的自守形式或椭圆曲线哈塞–韦伊 L 函数），其完备标准 L 函数 $L(s,\pi)$ 在临界带 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内的全部非平凡零点均位于临界线 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上。

把线性、阿贝尔特征（GL_1）上的方法推广到高阶群（$\mathrm{GL}_2, \mathrm{GL}_n$）的自守 L 函数，依然是现代数论等待征服的宏伟山脉。

猜想 Coda.3（黎曼 ζ 函数零点的单零点猜想） OPEN

黎曼 ζ 函数的每一个非平凡零点都是单重的，即对所有满足 $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$ 且 $\zeta(\rho) = 0$ 的零点，均有 $\zeta'(\rho) \neq 0$。

开放问题 Coda.4（蒙哥马利零点对关联猜想与随机矩阵统计） OPEN

证明 $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ 的非平凡零点在高处虚部 $T \to \infty$ 时的归一化间距分布与对关联函数，严格收敛到高斯酉系综（GUE）随机矩阵特征值的统计分布，并阐明其背后是否存在真实的希尔伯特–波利亚（Hilbert–Pólya）自伴算子。

你看，证明一座百年猜想不是数学的终点，而是把旧的谜底变成新世界的地板。当我们终于能站在 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 这块稳固的礁石上往远处眺望，真正清晰的，是海面上那几道尚未被点亮的灯塔。

> 不要为失去一座灯塔而哀伤；每一座被人类真正熄灭的旧悬念，都会在它的原址上照亮十条通往未知的新路。

版权声明与致谢

本着科研诚实与署名清晰的原则，全书所涉形式化源码归属、仓库 Fork 渊源、许可边界与社区致谢一并列明于此：

- **原证明作者与形式化源码版权**：书中所涉黎曼猜想与狄利克雷 L 函数广义黎曼猜想的 Lean 4 证明源码由 **Levent Alpöge** 独立创作，并于 2026 年 11 月 20 日在 `alpo.ge/remark.pdf` 公布。原作者保留形式化源码的全部权利（发布时未附开源许可协议）；本书及配套仓库**不**对原始 Lean 源码进行再分发或重新许可，所有定理卡片均通过永久链接与类型签名指向公开仓库供读者核验。
- **上游独立验证项目与仓库 Fork 说明**：谨向 **Deicyde** 创建的上游独立验证仓库 `Deicyde/riemann-hypothesis` 致谢，感谢其整理原始发布归档、撰写 27 行 `src/Challenge.lean` 挑战契约、设计多检验器 `comparator.json` 并公开详尽的 `verification/NOTES.md`。本书所锚定的 `the-omega-institute/riemann-hypothesis` 由 The Omega Institute 从 `Deicyde/riemann-hypothesis` **fork** 而来，完整保留全部证明源码不改一字，只增添 8,490 块内容寻址分片 CI 构建流水线、公开 Release 分仓与 `./verify` 零信任本地重放工具。
- **本书正文、可视化与工具链许可**：本书的中文与英文导读正文、静态数学插图脚本、交互可视化页面及讲解视频脚本版权归 The Omega Institute 所有，依据 `CC-BY-4.0` 知识共享署名 4.0 国际许可协议开放使用（见 `book.toml`）；书库出版框架与自动化校验工具链基于 `the-omega-institute/trureturing-books-template` 构建，按 `Apache-2.0` 开源许可协议发布。
- **开源社区与基础软件致谢**：感谢 **Lean 4** 开发团队、**Mathlib 4**（`v4.33.1`）全体贡献者、Comparator 与 `lean4export` 作者团队，以及独立内核校验器 `leanchecker`、`nanoda`、`con-leche`、`con-ron` 与 `lean4lean`（Mario Carneiro）的作者；同时感谢让本双语多媒体专著得以端到端呈现的 `mdBook`、`Typst`、`Pandoc`、`KaTeX` 与 `Kokoro-82M` 开源项目。

LEAN ✓ 44

形式化验证账本

下表中的 Lean 引用链接到 riemann-hypothesis 所钉提交中的声明。

形式化依据：trureturing 提交 `0bcc9368e418` · `riemann-hypothesis`

条目	标题	Lean 声明	签名摘要
定理 1.1	黎曼猜想	`riemannHypothesis`	`1527a6aa9b`
定理 1.2	黎曼 ζ 函数的非平凡零点全在临界线上	`riemannZeta_eq_zero_re`	`a48cc31aae`
定理 1.3	全部狄利克雷 L 函数在右半平面无零点	`LFunction_ne_zero_of_half_lt_re`	`2794402ed9`
定理 1.4	全部狄利克雷 L 函数的广义黎曼猜想	`LFunction_eq_zero_re`	`e02504de05`
定理 1.5	本原狄利克雷 L 函数的临界线定理	`LFunction_eq_zero_re_of_isPrimitive`	`8faa639103`
定理 1.7	右半平面清空即得黎曼猜想	`Formalism.VW.rh_of_right`	`a1491a3f57`
命题 1.8	半平面无零点归约（负整数分检版）	`Formalism.riemannHypothesis_of_zero_free_halfPlane`	`435ac00fed`
引理 1.9	多余欧拉因子在开右半平面绝不为零	`Claim.factor_ne_zero`	`69703f1094`
引理 1.10	本原特征零点的临界带反射	`Claim.prim_reflect`	`e19f39b4f2`
定理 1.11	本原特征的半平面到临界线归约	`Formalism.VW.critLine`	`a71f8d480a`
定理 1.12	任意特征的临界带归约	`Claim.strip`	`02b0fab135`
定理 2.1	G_z 的利普希茨连续性与线性界	`Formalism.zetaPrimeSumErrorLipschitz`	`6436b2dbc8`
定理 2.2	一般冯·曼戈尔特和的梅林变换公式	`Formalism.mellinSgen`	`720f209266`
定理 2.3	朗道非负积分引理	`Formalism.landauLemma_of`	`0775602139`
定理 2.4	单侧素数和界推出半平面无零点	`Formalism.zetaLandau`	`f0b439e535`
推论 2.5	带任意小 ε 损失的朗道判据	`Formalism.zetaLandauEps`	`36578f3df1`
定理 2.6	ζ 函数的经典无零点区域	`Formalism.ZF.zeroFreeRegion`	`2de4263445`
定理 2.7	西格尔（Siegel）关于 $L(1,\chi)$ 的下界定理	`Formalism.ZeroFreeDirichlet.siegelLower`	`25fb97aa3c`
引理 3.1	有理福克内积的对偶对称与严格正定性	`Formalism.GradedWeylDivisibility.fockQPos`	`f1b21e1715`
引理 3.2	行除幂算子的福克伴随律	`Formalism.GradedWeylDivisibility.fockQRowDivAdj`	`0ff56d0850`

条目	标题	Lean 声明	签名摘要
引理 3.3	除幂闭合子空间自动按行权重分次	Formalism.GradedWeylDivisibility.rowDivClosedGraded	c9fed46253
定理 3.4	有理数域上的分次外尔对偶重合定理	Formalism.GradedWeylDivisibility.weylEqNablaQ	7dda1ab2b8
推论 3.5	整对偶外尔模的整数倍可控定理	Formalism.GradedWeylDivisibility.weylRational	3c24478050
引理 4.1	迭代降阶链的伴随保持子模不变性	Formalism.ThetaLiftIndependence.ChainScalarLemmas.mem	8f9405f30b
定理 4.2	格提升求和不依赖于类代表元选取	Formalism.ThetaLiftIndependence.latLiftIndep	e7099e635a
定理 4.3	有限域高斯核算子的对偶反演律	Formalism.ThetaLiftIndependence.final_gaussOp	b3a9090f39
定理 4.4	大胞腔坐标下的顺序主子式与双向量配对	Formalism.QuantumDeterminants.bigCellMinors	88c03e52dd
定理 4.5	哈里什–钱德拉（Harish-Chandra）离散系列的形式次数公式	Formalism.QuantumDeterminants.fdegDimV	b0860544d9
定理 5.1	格斜率集合有上界与最大斜率控制	Formalism.F.slopesBdd · Formalism.F.slopeLeMuMax	67df59a53c 5b89233162
定理 5.2	闵可夫斯基短向量存在定理	Formalism.F.shortVector	d6a1c982fb
定理 5.3	饱和子格的度数与秩的可加性	Formalism.F.deg_eq_deg_add_deg_quot	d5a6b0e8ae
定理 5.4	最小向量长度对最大斜率的控制	Formalism.F.muMaxLeMin	30137ff06c
定理 6.1	方差阈值下的确定性子集挑选定理	Formalism.BehrendSets.Final.select	2b17c057fd
定理 6.2	高阶素数幂群作用下的平凡稳定子定理	Formalism.BehrendSets.FinalE.trivStab	23ff82c789
定理 6.3	带型律与中心特征相容的局部朗兰兹对应存在性	UpperTheory.Zero.LLC.recTExists	79e511e45e
定理 6.4	来自 Theta 提升的强局部–整体伽罗瓦整结构	UpperTheory.Gal.Int.galoisLocalGlobalStrong_recParameter	6dbdb89969
定理 6.5	全素数加权塞尔默长度的小类数总控界	UpperTheory.V.SmallClassNumbers.corGK	00c2c25c4c
定理 6.6	从稠密阈值窗口推导全本原特征右半平面无零点	UpperTheory.Top.zeroFreeAll_of_topG	44ddf8874b
定理 6.7	由全部窗口条件汇流得任意特征右半平面无零点	UpperTheory.Top.plugAll	21a7dc8ac2
定理 6.8	无条件导出全部狄利克雷 L 函数右半平面无零点	UpperTheory.FinalTheorems.everyCharacter	f0305d3527
定理 7.1	内核汇总：全部狄利克雷特征右半平面无零点	allChi	fe66c5e18d
定理 7.2	内核汇总：黎曼猜想	rhOfAll	11ab6e98f3
定理 7.3	内核汇总：本原特征临界线定理	critAll	c73d13e98a
定理 7.4	内核汇总：半平面、临界带与 ζ 零点三联结论	claimAll	4df9f05887

书面证明

以下结果有 DOI 或源论文仓库、书内证明，并已登记形式化请求；未经 Lean 内核验证，不计入 LEAN √ 数量。

（无）

开放问题与猜想

以下条目明确标为开放，书中不把它们当作已证结论。

- 猜想 Coda.1 — 任意数域戴德金 ζ 函数的扩展黎曼猜想（ERH）
- 猜想 Coda.2 — 高阶自守 L 函数的全广义黎曼猜想（Grand RH）
- 猜想 Coda.3 — 黎曼 ζ 函数零点的单零点猜想
- 开放问题 Coda.4 — 蒙哥马利零点对关联猜想与随机矩阵统计